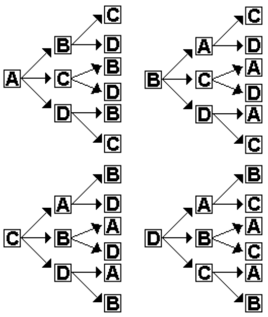
ANÁLISE COMBINATÓRIA

Considere os dois problemas abaixo:

Em uma corrida envolvendo quatro corredores, quantas são as possibilidades de pódio?



Para *cada* possível 1º lugar, existem três possíveis 2ºs lugares e, para *cada* um desses segundos, duas opções para 3º colocado. Como mostra o diagrama, são 24 pódios distintos.

Em um grupo de quatro alunos, conseguimos formar quantos trios diferentes?

ABC
ABD
ACD
CBD

Para a resolução desse problema, a estratégia anterior não funciona, pois as escolhas não possuem **hierarquia** entre si: ser o primeiro, o segundo ou terceiro do trio é indiferente. Observe que no problema anterior a primeira escolha é diferenciada das demais, assim como *cada* escolha é diferenciada das demais. Em tempo: a resposta do problema, como mostram as possibilidades listadas acima, é 4.

A análise combinatória distingue dois tipos de agrupamentos: seqüências e conjuntos.

Seqüências

São agrupamentos que se diferenciam pelos elementos componentes ou pela **ordem** desses elementos. Por exemplo, (A, B) ≠ (B, A) pela ordem em que aparecem e (A, B) ≠ (A, C) pelos elementos escolhidos. Observe que ordem implica **hierarquia** entre escolhas: a ordem somente é importante quando **cada escolha tiver uma função diferente no problema**.

Conjuntos

São agrupamentos que se diferenciam somente pelos elementos componentes. No mesmo exemplo anterior, {A, B} = {B, A} e {A, B} ≠ {A, C}. A ordem aqui não é importante. Ou seja, não existe **hierarquia** e, com isso, cada escolha desempenha o mesmo papel no problema.

PRÍNCIPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

O raciocínio utilizado para a resolução do primeiro problema é muito importante para resolver *qualquer* problema de Análise Combinatória.

Considere um problema onde **n decisões independentes** devem ser tomadas. Para cada uma dessas decisões existem $d_1, d_2, d_3, ..., d_{n-1}, d_n$ opções de escolha. Tendo em mente a ramificação das escolhas (ou árvore de possibilidades) apresentada anteriormente, sabe-se que a 1ª escolha possui d_1 possibilidades, que se ramificam em d_2 opções para a 2ª, que por sua vez se ramificam em d_3 para a 3ª, e assim sucessivamente, até se ramificar em d_n possibilidades para a n-ésima e última escolha.

Assim, n decisões independentes com $d_1, d_2, ..., d_n$ opções de escolha cada geram um total de $d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot ... \cdot d_{n-1} \cdot d_n$ seqüências. Observe que esse é o número de seqüências e não de conjuntos, pois as decisões são independentes. Ou seja, há hierarquia entre elas.

EXERCÍCIOS DE AULA

01) Uma bandeira assimétrica é formada por quatro listras, que devem devem ser coloridas usando-se apenas as cores amarelo, branco e cinza, não devendo listras adjacentes ter a mesma cor. De quantos modos pode ser colorida a bandeira?

Se iniciarmos colorindo a primeira lista, a única restrição diz que a listra seguinte deve ser de cor diferente. Assim, $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ modos.

02) Quantos números naturais de quatro algarismos distintos existem?

Nosso sistema decimal possui 10 algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. O único que não pode iniciar um número é o algarismo "0". Assim, existem $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ números, já que os algarismos devem ser distintos.

Pequenas dificuldades adiadas costumam transformar-se em grandes dificuldades. Se alguma decisão é mais complicada que as demais, ela deve ser tomada em primeiro lugar

.

03) Quantos números naturais de 4 algarismos, que sejam menores que 5000 e divisíveis por 5, podem ser formados usando-se apenas os algarismos 2, 3, 4 e 5?

São duas as restrições: o primeiro algarismo não pode ser “5” e o último algarismo, por outro lado, deve ser igual a “5”. Com isso, existem $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1 = 48$ números que atendem essas condições.

04) Quantos são os números naturais pares que se escrevem com 3 algarismos distintos?

A exigência de algarismos distintos proíbe a repetição. Ainda, para formar números pares exige-se que o último algarismo seja par: 0, 2, 4, 6 ou 8. A dificuldade desse exercício está no fato de “0” não poder ser utilizado como primeiro algarismo. Assim, se ele for escolhido como último, são 9 os possíveis algarismos para o primeiro; no entanto, se não for, existirão somente 8 possíveis primeiros algarismos. Separando em casos: $9 \cdot 8 \cdot 1 = 72$ números onde “0” **é** o último algarismo e $8 \cdot 8 \cdot 4 = 256$ números onde “0” **não é** o último algarismo. Assim, 72 + 256 = 328 números.

Outra resolução: existem $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ números com três algarismos distintos. Para que sejam ímpares, o último algarismo deve ser ímpar: 1, 3, 5, 7 ou 9. Assim, $8 \cdot 8 \cdot 5 = 320$ números são ímpares. Com isso, 648 - 320 = 328 são números pares.

05) Em quantos números de quatro algarismos o algarismo “5” aparece pelo menos uma vez?

A mesma abordagem da segunda resolução do exercício anterior pode ser utilizada: descontando o que não interessa do total. No exercício 2, calculamos em 9.000 o total de números com quatro algarismos. Se o “5” não for utilizado, serão $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 5832$. Logo, serão 9000 - 5832 = 3168 números onde o algarismo “5” aparece pelo menos uma vez.

06) A respeito das letras da palavra “TESOURA”:

a) Quantos anagramas apresentam as letras S, O e U juntas e nessa ordem?

O enunciado exige que os anagramas formados contem com a junção “SOU”. Assim, as três letras S, O, U serão contados como somente uma opção de agrupamento: afinal, deverão estar juntas e nessa mesma sequência.

Com isso, as opções para escolha são as letras T, E, R, A e o agrupamento SOU. Ou seja, 5 opções. Assim, existirão $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ anagramas.

b) Quantos anagramas apresentam as letras S, O e U juntas?

O enunciado faz quase a mesma exigência que o anterior, mas retira uma: o agrupamento “SOU” pode aparecer como “USO” ou “SUO”, por exemplo. A exigência da ordem não existe mais.

No entanto, a resolução para *qualquer* ordem segue a mesma: existirão 120 anagramas com “USO” e 120 anagramas com “SUO”. Desse modo, é preciso calcular de quantas maneiras é possível reordenar o agrupamento original “SOU”: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ maneiras, sendo que cada uma gerará 120 anagramas diferentes. Ou seja, serão $6 \cdot 120 = 720$ anagramas distintos.

c) Quantos anagramas começam por vogal ou terminam por consoante?

Das sete letras, três são consoantes e quatro são vogais. Assim, $4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2880$ começam por vogal e $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 2160$ terminam por consoante. No entanto, os anagramas que começam por vogal **e** terminam por consoante estão sendo contados em ambos os casos. Esses casos duplos totalizam $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 1440$ anagramas. Assim, existem 2880 + 2160 - 1440 = 3600 anagramas nas condições exigidas.

Notação Fatorial

n! = n·(n - 1)·(n - 2)·(n - 3)· ··· ·3·2·1, com n natural.

Além da definição algébrica para fatorial, deve ser compreendida também a definição combinatória:

n! é o número de seqüências com n elementos distintos que formamos a partir de n elementos.

Por exemplo, $4! \Leftrightarrow \underline{4} \cdot \underset{\neq E_1}{\underline{3}} \cdot \underset{\substack{\neq E_1 \\ \neq E_2}}{\underline{2}} \cdot \underset{\substack{\neq E_1 \\ \neq E_2 \\ \neq E_3}}{\underline{1}} = 24$.

Observe ainda que cada fatorial contém todos os fatoriais anteriores. Por exemplo,

$$5! = 5 \cdot \underbrace{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{} = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 4 \cdot 3! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1! = 120$$
$$4! = 4 \cdot \underbrace{3 \cdot 2 \cdot 1}_{}$$
$$3! = 3 \cdot \underbrace{2 \cdot 1}_{}$$
$$2! = 2 \cdot \underbrace{1}_{1!}$$

$\boxed{\text{Obs.: } 0! = 1! = 1}$

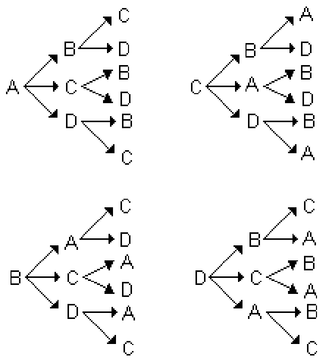
CONTAGEM DE CONJUNTOS

Quantas **seqüências** de 3 letras distintas formamos utilizando A, B, C e D?

$$\underset{A,\ B,\ C,\ D}{\underline{4}} \cdot \underset{\neq 1^a}{\underline{3}} \cdot \underset{\neq 1^a,\ 2^a}{\underline{2}} = 24$$

ABC	BAC	CAB	DAB
ACB	BCA	CBA	DBA
ABD	BAD	CAD	DAC
ADB	BDA	CDA	DCA
ACD	BCD	CBD	DBC
ADC	BDC	CDB	DCB

Outra forma de visualizar os resultados é analisando a árvore de possibilidades correspondente ao problema.



Repare que quando formamos seqüências a **ordem** em que as escolhas são feitas **é relevante** para o problema. Por exemplo, as seqüências ABC e BAC possuem os mesmos elementos, mas a diferença de posição entre os elementos A e B faz com que as seqüências sejam diferentes. Ou seja, **existe uma diferença de hierarquia entre as escolhas**, pois o fato de um elemento ter sido listado na primeira, segunda ou terceira escolha é importante para o resultado final.

Vamos mudar agora a **essência** da pergunta inicial.

Quantos **conjuntos** de 3 letras distintas formamos utilizando A, B, C e D?

Como vimos, um conjunto é diferente do outro somente pelos elementos escolhidos. Ou seja, a **ordem** em que as escolhas foram feitas **é irrelevante para o resultado final**: {A, B, C} e {B, A, C} são o mesmo conjunto.

Dito isso, é possível perceber que a árvore de possibilidades da pergunta anterior não resolve a nova questão, pois **não existe hierarquia** entre as escolhas: ter sido o primeiro, o segundo ou o terceiro elemento escolhido não muda em nada o resultado final.

No entanto, basta descobrir *quantas seqüências são geradas por cada conjunto específico*. Tendo essa informação, não é difícil observar que o número de conjuntos é dado pela fórmula:

$$\begin{array}{c}\text{Número de} \\ \text{Conjuntos}\end{array} = \frac{\begin{array}{c}\text{Número de} \\ \text{Seqüências}\end{array}}{\begin{array}{c}\text{Número de} \\ \text{Seqüências por Conjunto}\end{array}}$$

O número de seqüências por conjunto é simples de ser obtido: por exemplo, o conjunto {A, B, C} gera 6 seqüências distintas, ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA. Esse número não é difícil de ser calculado pelo PFC: {A, B, C} → $\underset{A,B,C}{\underline{3}} \cdot \underset{-1^o}{\underline{2}} \cdot \underset{-1^o,-2^o}{\underline{1}} = 3! = 6$.

Esse cálculo é o mesmo para qualquer conjunto com 3 elementos distintos: $\underline{3} \cdot \underset{-1^o}{\underline{2}} \cdot \underset{-1^o,-2^o}{\underline{1}} = 3! = 6$. De modo geral, um conjunto com **n** elementos distintos gera **n! seqüências** com n elementos distintos.

Voltando ao problema inicial, sabemos que com A, B, C e D formamos 24 seqüências distintas. No entanto, observe que conjuntos como {A, B, C}, {B, C, A} e {A, C, B} estão sendo contados como *seqüências distintas*, mas são *conjuntos iguais*.

Como *cada* conjunto gera 3! = 6 seqüências distintas, o número de conjuntos distintos é $\frac{24}{6} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} = 4$. São eles: {A, B, C}, {A, B, D}, {A, C, D} e {B, C, D}.

Agora, generalizaremos nosso procedimento. Para resolver problemas onde a troca de posições não altera o resultado final (onde não existe hierarquia entre as escolhas), devemos fazer o seguinte:

01) Calcular, primeiramente, quantas seqüências é possível formar com os elementos, exatamente da mesma forma já estudada.

02) Dividir o resultado encontrado pelo fatorial do número de escolhas de mesma hierarquia no problema. Esse será o número de seqüências distintas que cada conjunto gera.

Pode-se usar as notações $\mathbf{C_{n,\ p}}$ e $\binom{n}{p}$ para indicar o número de conjuntos com **p** elementos distintos a partir de **n** opções, formados sem restrição. Ainda, a notação $\mathbf{P_n}$ indica o número de seqüências geradas pela permutação de n elementos distintos, e $\mathbf{A_{n,\ p}}$ indica o número de seqüências com **p** elementos distintos a partir de **n** opções.

Compare algumas situações para se familiarizar com a idéia da hierarquia entre escolhas:

Número de pódios em uma corrida com 5 participantes	$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$	As posições têm hierarquias distintas.
Número de triângulos formados por 5 vértices em uma circunferência	$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10$	Ser o primeiro, o segundo ou o terceiro vértice é irrelevante.
Número de chapas para Presidente/Vice a partir de 4 opções	$4 \cdot 3 = 12$	Ser Presidente é hierarquicamente diferente de ser Vice.
Possíveis representantes de turma, escolhendo 2 alunos entre 4.	$\frac{4 \cdot 3}{2!} = 6$	Os dois representantes possuem o mesmo cargo.

EXERCÍCIOS DE AULA

07) A diretoria de uma empresa é constituída por 7 brasileiros e 4 japoneses. Quantas comissões de 3 brasileiros e 3 japoneses podem ser formadas?

Esse exercício na verdade são dois: quer se formar uma comissão de brasileiros e outra, desvinculada, de japoneses. Assim, $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} \Big| \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} = 35 \cdot 4 = 140$ é o número de comissões possíveis.

08) De quantas maneiras 10 alunos podem ser separados em dois times de 5 na Educação Física? E para formar grupos de estudo de Matemática e Química com 5 alunos em cada?

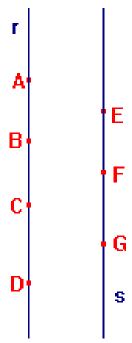
As duas perguntas parecem a mesma: separar 10 pessoas em dois grupos de 5, o que pode ser feito de $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5!} \Big| \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5!} = 252 \cdot 1 = 252$ modos. No entanto, não há distinção entre os times na Educação Física: se todos os alunos que formam um determinando time passarem a formar o outro time, não ocorrerá alteração na partida: ou seja, a resposta para a primeira pergunta é $\frac{252}{2} = 126$. Para a segunda, no entanto, se os alunos do grupo de Química passassem todos para os de Matemática existiria diferença no resultado final. Logo, são 252 maneiras de separar tais alunos.

09) Em uma turma, existem 10 alunos, incluindo Juarez. De quantos modos formar quartetos onde Juarez sempre participe? E em quantos eles nunca participará?

A inclusão de Juarez representa um candidato e uma vaga a menos, já que ele será escolhido. Assim, são 9 alunos para 3 vagas: $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!} = 84$ quartetos que incluem Juarez.

Para excluir Juarez, basta observar que serão as mesmas 4 vagas, só que agora para 9 estudantes somente: são $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} = 126$ quartetos sem Juarez.

10) Os pontos A, B, C e D pertencem à reta r, e os pontos E, F e G pertencem à reta s, sendo r // s. Quantos triângulos podemos formar com esses vértices?



Sendo 7 os possíveis pontos e três os pontos a serem escolhidos, serão $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35$ os possíveis trios formados. No entanto, nem todos formam triângulo: E,F,G estão sobre a mesma reta, e sobre r estão $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} = 4$ outros trios. Assim, serão 35 - 1 - 4 = 30 possíveis triângulos.

Permutações Com Repetição

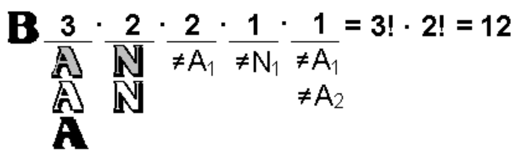
A distinção que fizemos até agora entre *seqüências* e *conjuntos* funciona adequadamente para a maioria dos problemas. No entanto, existem situações em que podemos gerar resultados repetidos mesmo observando a distinção hierárquica entre as escolhas. Para ilustrar, considere os anagramas formados com as letras da palavra "BANANA".

À primeira vista, como são 6 letras, sendo que ser a primeira letra é hierarquicamente diferente de ser a segunda, temos um total de 6! = 720 anagramas. No entanto, basta analisar um desses anagramas para verificar que essa resposta não é correta.

Por exemplo, o (único) anagrama que forma exatamente a palavra "BANANA": se a letra "B" estivesse em qualquer posição diferente da primeira, evidentemente o anagrama seria diferente; ainda, se a letra "A" cinza trocasse de lugar com a letra "N" branca, o anagrama também seria diferente. No entanto, o que ocorreria se trocássemos de lugar o "A" cinza com o "A" preto? Ou o "N" branco com o "N" cinza? Não ocorreriam mudanças no anagrama, visto que a *mesma letra* continuaria ocupando a *mesma posição*.

Ou seja, apesar de as escolhas serem hierarquicamente diferentes, existem trocas de ordem que *não* alteram o resultado final - o anagrama. A pergunta que deve ser respondida aqui é: quantos anagramas iguais são gerados a partir da definição de um anagrama fixo? Voltando ao exemplo e perguntando de outro modo: quantas vezes é possível formar o mesmo anagrama "BANANA" a partir da mudança de posição das letras que o formam?

Não é difícil responder, ainda mais se analisarmos o próprio exemplo em questão. Nele, exige-se que a letra "B" seja a primeira, que a letra "A" ocupe as posições 2, 4 e 6 e que a letra "N" ocupe as posições 3 e 5. A pergunta pode ser respondida via PFC:



Ou seja, o anagrama "BANANA" gera 12 anagramas iguais a ele somente pela troca de posição das letras repetidas. O mesmo raciocínio vale para *qualquer* anagrama formado com as letras de "BANANA".

Dessa forma, o total de anagramas *distintos* formados pelas letras de "BANANA" é:

$$\frac{6!}{\boxed{3!} \cdot \boxed{2!}} = \frac{720}{12} = 60$$

$3\ A´s \qquad 2\ N´s$

Repare que o mesmo raciocínio pode ser generalizado facilmente. Se um elemento aparece repetido *n* vezes, existem *n!* modos de se permutar esse elemento sem alterar o resultado final, fixando sua posição no mesmo problema. Com isso, existirão n! seqüências repetidas *para cada elemento repetido*.

Assim, se os elementos $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ aparecem cada um deles repetidos $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ vezes, então existem $a_1! \cdot a_2! \cdot a_3! \cdot ... \cdot a_n!$ seqüências repetidas, e o número total de seqüências deve ser *dividido* por esse novo resultado.

Essa lógica também ajuda a responder problemas de contagem de conjuntos. Por exemplo, quantos trios diferentes podemos formar a partir de 5 pessoas?

Aprendemos a resolver o problema analisando que, em um trio, todas as posições têm a mesma hierarquia. Assim, existem $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10$ trios distintos.

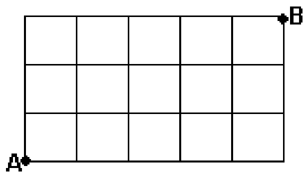
No entanto, podemos interpretar esse problema como um anagrama com repetição. Se a letra "E" simbolizar "escolhida" e a letra "N", "não-escolhida", as seqüências EEENN, ENENE, NNEEE, por exemplo, ilustram diferentes modos de fazer as escolhas entre as cinco pessoas, onde a posição de cada letra indica cada uma dessas pessoas. Anagramas com repetição são fáceis de calcular. Com 5 letras, sendo 3 "E"s e 2 "N"s, o total de anagramas distintos é $\frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{\mathbf{5 \cdot 4 \cdot 3} \cdot \cancel{2!}}{\mathbf{3!} \cdot \cancel{2!}} = 10$.

EXERCÍCIOS DE AULA

11) Quando oito moedas distintas são lançadas simultaneamente, de quantos modos é possível obter um resultado com 5 caras e 3 coroas?

Um possível resultado é KKKKKCCC, onde as cinco primeiras são caras e as três últimas são coroas; outro são KCKCKCKK e KKKCCCKK. Em comum, o fato de todos os possíveis casos poderem ser representados por anagramas de oito letras, sendo cinco K´s repetidos e três C´s repetidos. Com isso, são $\frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$ modos de se obter o resultado desejado.

12) No desenho abaixo, as linhas horizontais e verticais representam ruas, e os quadrados representam quarteirões. Qual é a quantidade de trajetos de comprimento mínimo ligando A a B?



Se representarmos cada deslocamento horizontal pela letra H e cada deslocamento vertical pela letra V, o anagrama HHHHHVVV representa o caminho onde é percorrida a base da figura e a altura a seguir; o anagrama HVHVHVHH formaria uma espécie de escada até chegar a B. Em comum mais uma vez, o fato de serem anagramas com oito letras, sendo cinco H´s e três V´s. Ou seja, têm a mesma resolução do exercício anterior: $\frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$ trajetos.

EXERCÍCIOS

931) Quantos números naturais pares de três algarismos distintos existem com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 9?

932) Com os algarismos pares, sem os repetir, quantos números naturais compreendidos entre 2000 e 7000 podem ser formados?

933) Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 10 questões de múltipla-escolha, com cinco alternativas por questão?

934) De quantos modos 3 pessoas podem sentar-se em 5 cadeiras em fila?

935) (MACK) A quantidade de números naturais de três algarismos com **pelo menos** dois algarismos iguais é:

a) 38 b) 252 c) 300 d) 414 e) 454

936) Quantos são os números de 5 algarismos nos quais o algarismo “2” aparece?

937) (UFRGS) Os números dos telefones de uma cidade são constituídos por 6 dígitos. Sabendo que o primeiro dígito nunca pode ser zero e que os números dos telefones passarão a ser de 7 dígitos, o aumento possível na quantidade dos telefones será:

a) $81 . 10^3$ b) $90 . 10^3$ c) $81 . 10^4$
d) $81 . 10^5$ e) $90 . 10^5$

938) Resolver a equação $\frac{(p+2)!}{p!} = 72$.

939) Têm-se 5 meninos e 5 meninas. De quantas formas eles podem ficar em fila, se os meninos e as meninas devem ficar em posições alternadas?

940) (UNESP) Quatro amigos, Pedro, Luísa, João e Rita, vão ao cinema, sentando-se em lugares consecutivos na mesma fila. O número de maneiras que os quatro podem ficar dispostos de forma que Pedro e Luísa fiquem sempre juntos e João e Rita fiquem sempre juntos é:

a) 2 b) 4 c) 8 d) 16 e) 24

941) (UFMG) Um clube resolve fazer uma Semana de Cinema. Para isso, os organizadores escolhem sete filmes, que serão exibidos um por dia. Porém, ao elaborar a programação, eles decidem que três desses filmes, que são de ficção científica, devem ser exibidos em dias consecutivos. Nesse caso, o número de maneiras DIFERENTES de se fazer a programação dessa semana é:

a) 144 b) 576 c) 720 d) 1040 e) 2080

942) (UFES) De quantas maneiras 10 clientes de um banco podem se posicionar na fila única dos caixas de modo que as 4 mulheres do grupo fiquem juntas?

a) 4!.7! b) 5!.6! c) 6.6! d) 10.6! e) 4!+ 10!

943) (MACK) Uma classe tem 10 meninos e 9 meninas. Quantas comissões diferentes existem com 4 meninos e 3 meninas, incluindo o melhor aluno dentre os meninos e a melhor aluna entre as meninas?

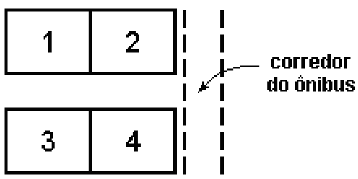
944) (MACK) Utilizando-se, necessariamente, os algarismos 1 e 2, podemos formar K números distintos com 5 algarismos. Então K vale:

a) 30 b) 48 c) 64 d) 72 e) 78

945) (UFBA) Com os dígitos 1, 2, 3, 4, 6 e 8, podem-se formar x números ímpares, com três algarismos distintos cada um. Determine x.

946) (UNESP) Dois rapazes e duas moças irão viajar de ônibus, ocupando as poltronas de números 1 a 4, com 1 e 2 juntas e 3 e 4 juntas, conforme o esquema. O número de maneiras de ocupação dessas quatro poltronas, garantindo que, em duas poltronas juntas, ao lado de uma moça sempre viaje um rapaz, é:

a) 4.
b) 6.
c) 8.
d) 12.
e) 16.



947) (FGV) O número de segmentos de reta que têm ambas as extremidades localizadas nos vértices de um cubo dado é:

a) 12 b) 15 c) 18 d) 24 e) 28

948) (MACK) A partir de um grupo de 12 professores, quer se formar uma comissão com um presidente, um relator e cinco outros membros. O número de formas de se compor a comissão é:

a) 12.772 b) 13.024 c) 25.940
d) 33.264 e) 27.764

949) (MACK) Uma prova de atletismo é disputada por 9 atletas, dos quais apenas 4 são brasileiros. Os resultados possíveis para a prova, de modo que **pelo menos** um brasileiro fique numa das três primeiras colocações, são em número de:

a) 426 b) 444 c) 468 d) 480 e) 504

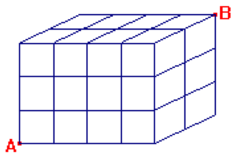
950) (PUCCAMP) Você faz parte de um grupo de 12 pessoas, 5 das quais deverão ser selecionadas para formar um grupo de trabalho. De quantos modos você poderá fazer parte do grupo a ser formado?

a) 182 b) 330 c) 462 d) 782 e) 7920

951) (UFRN) Um fenômeno raro em termos de data ocorreu às 20h02min de 20 de fevereiro de 2002. No caso, 20:02 20/02 2002 forma uma seqüência de algarismos que permanece inalterada se reescrita de trás para a frente. A isso denominamos capicua. Desconsiderando as capicuas começadas por zero, a quantidade de capicuas formadas com cinco algarismos não necessariamente diferentes é:

a) 120 b) 720 c) 900 d) 1000 e) 1100

952) Sendo possível somente percorrer as arestas dos cubos abaixo, quantos caminhos diferentes podemos fazer indo do ponto A até o ponto B, percorrendo o mínimo de arestas possível?



a) 150 b) 350 c) 1.260 d) 2.520 e) 7.560

953) (UNESP) Nove times de futebol vão ser divididos em 3 chaves, todas com o mesmo número de times, para a disputa da primeira fase de um torneio. Cada uma das chaves já tem um cabeça de chave definido. Nessas condições, o número de maneiras possíveis e diferentes de se completarem as chaves é:

a) 21 b) 30 c) 60 d) 90 e) 120

954) (UEL) Para responder a certo questionário, preenche-se um cartão colocando-se um "x" em uma só resposta para cada uma das cinco questões, compostas pelas alternativas “( ) SIM” e “( ) Não”. De quantas maneiras distintas pode-se responder a esse questionário?

a) 3125 b) 120 c) 32 d) 25 e) 10

955) (FATEC) Dispomos de 10 produtos para montagem de cestas básicas. O número de cestas que podemos formar com 6 desses produtos, de modo que um determinado produto seja sempre incluído, é:

a) 252 b) 210 c) 126 d) 120 e) 24

956) (MACK) Num grupo de 10 pessoas temos somente 2 homens. O número de comissões de 5 pessoas que podemos formar com 1 homem e 4 mulheres é:

a) 70 b) 84 c) 140 d) 210 e) 252

957) (CESGRANRIO) No código Morse, as letras são **.** e **-**, e as palavras contêm de uma a quatro letras. O número de palavras distintas que podem ser formadas neste código é de:

a) 16 b) 20 c) 24 d) 26 e) 30

958) (UFC) Assinale a alternativa na qual consta a quantidade de números inteiros formados por três algarismos distintos, escolhidos dentre 1, 3, 5, 7 e 9, e que são maiores que 200 e menores que 800.

a) 30 b) 36 c) 42 d) 48 e) 54

959) (UEL) Um número capicua é um número que se pode ler indistintamente em ambos os sentidos, da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda (exemplo: 5335). Quantos desses números têm 3 algarismos e são pares?

a) 20 b) 40 c) 80 d) 90 e) 100

960) Quantos números de 6 algarismos podemos formar permutando os algarismos 2, 2, 3, 3, 3, 5?

961) (UFSCAR) A câmara municipal de um determinado município tem exatamente 20 vereadores, sendo que 12 deles apóiam o prefeito e os outros são contra. O número de maneiras diferentes de se formar uma comissão contendo exatamente 4 vereadores situacionistas e 3 oposicionistas é:

a) 27720 b) 13860 c) 551 d) 495 e) 56

962) (FGV) Dentre 6 números positivos e 6 números negativos, de quantos modos podemos escolher 4 números cujo produto seja positivo?

a) 255 b) 960 c) 30 d) 625 e) 720

963) (SELESSUL) O número de permutações distintas possíveis com as 8 letras da palavra PARALELA, começando todas com a letra P, será de:

a) 120 b) 720 c) 420 d) 24 e) 360

964) (UFPA) Usando os algarismos do conjunto {2, 6}, podemos formar quantos números de 4 algarismos?

a) 0 b) 2 c) 4 d) 12 e) 16

965) (UFSC) Quantos números pares de 5 algarismos podemos escrever apenas com os dígitos 1, 1, 2, 2 e 3, respeitadas as repetições apresentadas?

a) 12 b) 30 c) 6 d) 24 e) 18

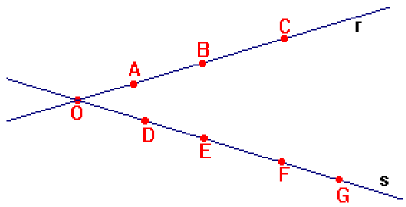
966) Quantos anagramas da palavra GARRAFA apresentam as letras A, A, A, R, R juntas em qualquer ordem?

967) (UEL) Usando uma vez a letra A, uma vez a letra B e **n - 2** vezes a letra C, podemos formar 20 anagramas diferentes com **n** letras em cada anagrama. Calcule n.

968) (PUCMG) Uma sala tem 6 lâmpadas com interruptores independentes. O número de modos de iluminar essa sala, acendendo pelo menos uma lâmpada, é:

a) 63 b) 79 c) 127 d) 182 e) 201

969) (UEL) Considere duas retas **r** e **s**, concorrentes em um ponto O, conforme mostra a figura abaixo. Quantos triângulos podem ser construídos, tendo por vértices três dos oito pontos assinalados?



a) 84
b) 72
c) 56
d) 42
e) 36

970) (UEL) São dados **n** pontos, dois a dois distintos entre si, quatro dos quais pertencem a uma reta r e os demais se encontram sobre uma reta paralela a r. Se podem ser construídos 126 quadriláteros com vértices nesses pontos, então **n** é um número:

a) menor que 10 b) primo c) múltiplo de 7
d) maior que 15 e) quadrado perfeito

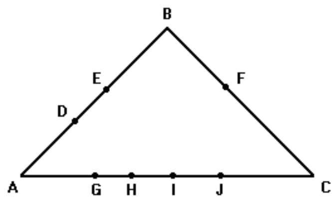
971) (UFRGS) O número máximo de triângulos que se pode obter quando se escolhem para seus vértices 10 pontos distintos sobre uma elipse é:

a) 40 b) 60 c) 120 d) 300 e) 720

972) (UFRGS) O número de diagonais de um polígono é o dobro de seu número n de lados. O valor de n é:

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

973) (UFMG) Na figura, o número de triângulos que se obtém com vértices nos pontos D, E, F, G, H, I J é:



a) 20
b) 21
c) 25
d) 31
e) 35

974) (UNIRIO) Um grupo de 9 pessoas, dentre elas os irmãos João e Pedro, foi acampar. Na hora de dormir montaram 3 barracas diferentes, sendo que, na primeira, dormiram duas pessoas; na segunda, três pessoas; e, na terceira, as quatro restantes. De quantos modos diferentes eles podem se organizar, sabendo que a única restrição é a de que os irmãos João e Pedro NÃO podem dormir na mesma barraca?

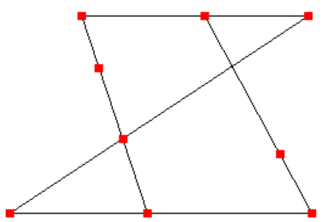
a) 1260 b) 1225 c) 1155 d) 1050 e) 910

975) (UFRJ) Uma estante de biblioteca tem 16 livros: 11 exemplares do livro “Combinatória é fácil” e 5 exemplares de “Combinatória não é difícil”. Considere que os livros com mesmo título sejam indistinguíveis. Determine de quantas maneiras diferentes podemos dispor os 16 livros na estante de modo que dois exemplares de “Combinatória não é difícil” nunca estejam juntos.

976) (PUCCAMP) Usando os algarismos 2, 3, 4, 5, 6, 8 e 9, sem repetição, quantos números pares de três algarismos e maiores que 234 pode-se formar?

a) 110 b) 119 c) 125 d) 129 e) 132

977) (PUCMG) No interior de um terreno retangular, foram fincadas nove estacas, conforme indicado na figura. Pretende-se demarcar nesse terreno lotes triangulares de modo que em cada vértice haja uma estaca. O número de lotes distintos que é possível demarcar é:



a) 42
b) 76
c) 84
d) 98
e) 100

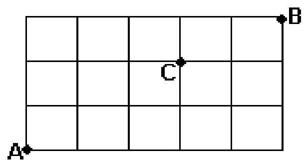
978) (ITA) Quantos números de seis algarismos distintos podemos formar usando os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, nos quais o 1 e o 2 nunca ocupam posições adjacentes, mas o 3 e o 4 sempre ocupam posições adjacentes?

a) 144 b) 180 c) 240 d) 288 e) 360

979) (MACK) Numa Universidade, na confecção do horário escolar, seis turmas devem ser atribuídas a três professores, de modo que cada professor fique com duas turmas. O número de formas de se fazer a distribuição é:

a) 21 b) 15 c) 45 d) 60 e) 90

980) (UFRGS) No desenho, as linhas horizontais e verticais representam ruas, e os quadrados representam quarteirões. A quantidade de trajetos de comprimento mínimo ligando A a B passando por C é:



a) 12
b) 13
c) 15
d) 24
e) 30

981) (ITA) Quantos anagramas com 4 letras distintas podemos formar com as 10 primeiras letras do alfabeto que contenham exatamente duas das letras A, B e C?

a) 1692 b) 1572 c) 1520 d) 1512 e) 1392

982) (ITA) Considere uma prova com 10 questões de múltipla escolha, cada questão com 5 alternativas. Sabendo que cada questão admite uma única alternativa correta, então o número de formas possíveis para que um candidato acerte somente 7 das 10 questões é:

a) 7680 b) 3840 c) 7500 d) 2240 e) 120

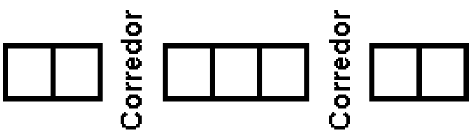
983) (UFRGS) Um trem de passageiros é constituído de uma locomotiva e 6 vagões distintos, sendo um deles restaurante. Sabendo-se que a locomotiva deve ir à frente, e que o vagão restaurante não pode ser colocado imediatamente após a locomotiva, o número de modos diferentes de montar a composição é:

a) 120 b) 320 c) 500 d) 600 e) 720

984) (UFSM) De quantas maneiras distintas podem-se alinhar cinco estacas azuis idênticas, uma vermelha e uma branca?

a) 12 b) 30 c) 42 d) 240 e) 5040

985) (MACK) Num avião, uma fila tem 7 poltronas dispostas como na figura. Os modos de João e Maria ocupares duas poltronas dessa fila, de modo que não haja um corredor entre eles, são em número de:



a) 6 b) 7 c) 8 d) 10 e) 12

986) (UNESP) O número de maneiras que 3 pessoas podem sentar-se em uma fileira de 6 cadeiras vazias de modo que entre duas pessoas próximas (seguidas), sempre tenha exatamente uma cadeira vazia é:

a) 3 b) 6 c) 9 d) 12 e) 15

987) (MACK) Utilizando-se, necessariamente, os algarismos 1 e 2, podemos formar K números distintos com 5 algarismos. Então, k vale:

a) 30 b) 48 c) 64 d) 72 e) 78

988) (ITA) Considere os números de 2 a 6 algarismos distintos formados utilizando-se apenas 1, 2, 4, 5, 7 e 8. Quantos desses números são ímpares e começam com um dígito par?

a) 375 b) 465 c) 545 d) 585 e) 625

989) (UFRGS) Para colocar preço em seus produtos, uma empresa desenvolveu um sistema simplificado de código de barras formado por cinco linhas separadas por quatro espaços. Podendo usar linhas de três larguras possíveis e espaços de duas larguras possíveis, o número total de preços que podem ser representados por esse código é:

a) 1440 b) 2880 c) 3125 d) 3888 e) 4320

990) (UFRGS) Quantas diagonais possui um polígono convexo de 20 lados?

a) 40 b) 170 c) 190 d) 200 e) 380

991) (UFRGS) Seja M o conjunto de todos os divisores positivos de 60. O número de subconjuntos de 3 elementos de M que se pode formar é:

a) 20 b) 36 c) 120 d) 220 e) 440

992) (UFRGS) Um professor organizou uma lista com 4 questões de Geometria e 6 de Álgebra, da qual indicou um conjunto diferente de 7 questões para cada um de seus alunos resolver. O número de alunos que recebeu todas as questões de Geometria para resolver é, no máximo, de:

a) 15 b) 20 c) 35 d) 42 e) 120

993) (UFRGS) Se uma partida de futebol termina com o resultado de 5 gols para o time A e 3 gols para o B, existem diversas maneiras de o placar evoluir de 0 x 0 a 5 x 3. Por exemplo, uma evolução poderia ser:

A	B
0	0

→

A	B
1	0

→

A	B
1	1

→

A	B
1	2

→

A	B
2	2

→

A	B
3	2

→

A	B
4	2

→

A	B
4	3

→

A	B
5	3

Quantas maneiras, no total, tem o placar de evoluir de 0 x 0 a 5 x 3?

a) 16 b) 24 c) 36 d) 48 e) 56

994) (UFMG) Um teste é composto por 15 afirmações. Para cada uma delas, deve-se assinalar uma das letras V ou F, caso a afirmação seja, respectivamente, verdadeira ou falsa. A fim de se obter, pelo menos, 80% de acertos, o número de maneiras diferentes de se marcar a folha de respostas é:

a) 455 b) 576 c) 560 d) 620 e) 640

995) (FUVEST) Três empresas devem ser contratadas para realizar quatro trabalhos distintos em um condomínio. Cada trabalho será atribuído a uma única empresa e todas elas devem ser contratadas. De quantas maneiras distintas podem ser distribuídos os trabalhos?

a) 12 b) 18 c) 36 d) 72 e) 108

996) (ITA) Considere 12 pontos distintos dispostos no plano, 5 dos quais estão numa mesma reta. Qualquer outro plano contém, no máximo, 2 destes pontos. Quantos triângulos podemos formar com os vértices nestes pontos?

a) 210 b) 315 c) 410 d) 415 e) 521

997) (UNESP) Considere os números 2, 3, 5, 7 e 11. A quantidade total de produtos distintos que se obtém multiplicando-se dois ou mais destes números, sem repetição, é:

a) 120 b) 52 c) 36 d) 26 e) 21

998) (UFRGS) O total de múltiplos de três com quatro algarismos distintos escolhidos entre 3, 4, 6, 8 e 9 é:

a) 24 b) 36 c) 48 d) 72 e) 96

999) (PUCCAMP) Usando os algarismos 2, 3, 4, 5, 6, 8 e 9, sem repetição, quantos números pares de três algarismos e maiores que 234 pode-se formar?

a) 110 b) 119 c) 125 d) 129 e) 132

1000) (FATEC) Seis pessoas, entre elas João e Pedro, vão ao cinema. Existem seis lugares vagos, alinhados e consecutivos. O número de maneiras distintas como as seis podem sentar-se sem que João e Pedro fiquem juntos é:

a) 720 b) 600 c) 480 d) 240 e) 120

1001) (ITA) O número de anagramas da palavra VESTIBULANDO que não apresentam as cinco vogais juntas é:

a)12! b)8!.5! c)12!-8!5! d)12!-8! e) 12! - 7!5!

1002) (UFRGS) Um trem de passageiros é constituído de uma locomotiva e seis vagões distintos, sendo um deles restaurante. Sabendo-se que a locomotiva deve ir à frente, e que o vagão restaurante não pode ser colocado imediatamente após a locomotiva, o número de modos diferentes de montar a composição é:

a) 120 b) 230 c) 500 d) 600 e) 720

1003) (FUVEST) Quantos são os números inteiros positivos de 5 algarismos que não têm algarismos adjacentes iguais?

a) 5^9 b) 9.8^4 c) 8.9^4 d) 8^5 e) 9^5

1004) (MACK) Se $x \in \mathbb{Z}$ tal que |x| < 10, o número de formas de escolher três valores de x com soma par é:

a) 527 b) 489 c) 432 d) 405 e) 600

1005) (ITA) Quantos números de seis algarismos distintos podemos formar usando os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, nos quais o 1 e o 2 nunca ocupam posições adjacentes, mas o 3 e o 4 sempre ocupam posições adjacentes?

a) 144 b) 180 c) 240 d) 288 e) 360

GABARITO

931	90	**932**	72	**933**	5^{10}	**934**	60
935	B	**936**	37512	**937**	D	**938**	7
939	28800			**940**	C	**941**	C
942	A	**943**	2352	**944**	A	**945**	40
946	E	**947**	E	**948**	D	**949**	B
950	B	**951**	C	**952**	C	**953**	D
954	C	**955**	C	**956**	C	**957**	E
958	B	**959**	B	**960**	60	**961**	A
962	A	**963**	C	**964**	E	**965**	A
966	60	**967**	5	**968**	A	**969**	D
970	B	**971**	C	**972**	C	**973**	D
974	E	**975**	792	**976**	B	**977**	B
978	A	**979**	E	**980**	E	**981**	D
982	A	**983**	D	**984**	C	**985**	D
986	D	**987**	A	**988**	D	**989**	D
990	B	**991**	D	**992**	B	**993**	E
994	B	**995**	C	**996**	A	**997**	D
998	D	**999**	B	**1000**	C	**1001**	C
1002	D	**1003**	E	**1004**	B	**1005**	A