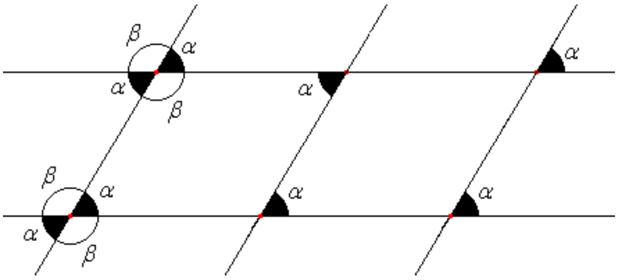
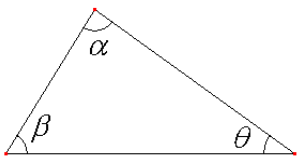
AULA 1 - GEOMETRIA PLANA

CONCEITOS BÁSICOS

Retas paralelas cortadas por uma transversal

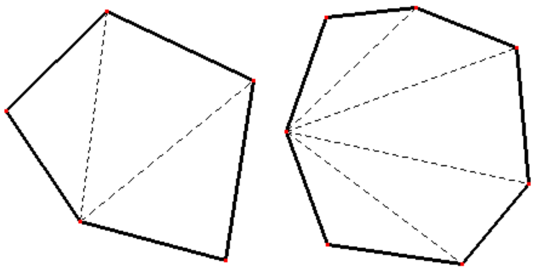


Soma dos ângulos internos de um triângulo



$$\alpha + \beta + \theta = 180^\circ$$

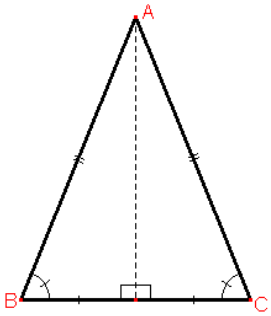
Soma dos ângulos internos de um polígono convexo



Um pentágono convexo pode ser dividido em três triângulos cujos ângulos internos são os mesmos do pentágono. Logo, a soma dos ângulos internos do pentágono vale 3 · 180º = 540º. De mesmo modo, um heptágono convexo pode ser dividido em cinco triângulos, e a soma dos seus ângulos internos valerá 5 · 180º = 900º. **Entender essa lógica é mais importante do que memorizar a fórmula em si.**

Generalizando, um polígono convexo de **n** lados pode ser divido em **n - 2** triângulos, já que os triângulos são formados a partir de diagonais do polígono. Dessa forma, os dois vértices adjacentes ao vértice de partida são "ignorados". Logo, a soma dos ângulos internos é dada por $S_n = (n-2)\cdot 180^\circ$.

Triângulos isósceles



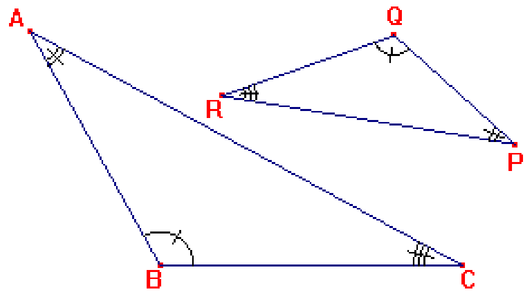
São aqueles que possuem **dois lados iguais**. Ligando o vértice A ao ponto médio da base BC, geramos dois triângulos congruentes. Logo, **os ângulos B e C são congruentes**.

$$AB \equiv AC \Leftrightarrow \hat{B} \equiv \hat{C}$$

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Dois triângulos são ditos semelhantes se:

- seus ângulos são congruentes.
- seus lados correspondentes são proporcionais.



$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR} = k$$

IMPORTANTE: Os lados opostos a ângulos congruentes são correspondentes.

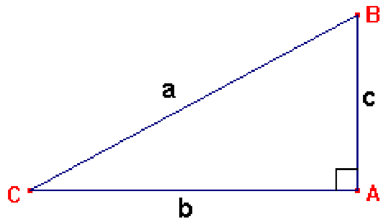
Em dois triângulos semelhantes, a razão de dois elementos lineares correspondentes quaisquer é igual à razão de semelhança.

PRINCIPAL CASO DE SEMELHANÇA

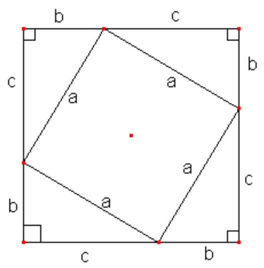
Se dois triângulos têm dois ângulos congruentes, então esses triângulos são semelhantes.

Ou seja, basta obtermos a congruência entre dois ângulos dos dois triângulos para que os lados correspondentes sejam proporcionais.

TRIÂNGULO RETÂNGULO



$$a^2 = b^2 + c^2$$



A área do quadrado de lado **b + c** é dada por **b² + 2bc + c²**. Porém, pode ser calculada somando o quadrado de área **a²** com os triângulos de área $\frac{bc}{2}$.

Logo, $a^2 + 4 \cdot \frac{bc}{2} = b^2 + 2bc + c^2$. Assim,

$$a^2 = b^2 + c^2$$

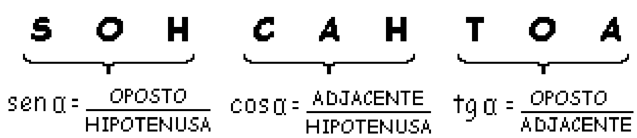
Ainda no triângulo retângulo, podemos definir as **razões trigonométricas**:

1) **Seno de um ângulo agudo α** é a razão da medida do cateto oposto ao ângulo α para a medida da hipotenusa.

2) **Cosseno de um ângulo agudo α** é a razão da medida do cateto adjacente ao ângulo α para a medida da hipotenusa.

3) **Tangente de um ângulo agudo α** é a razão da medida do cateto oposto para a medida do cateto adjacente ao ângulo α.

PARA LEMBRAR!



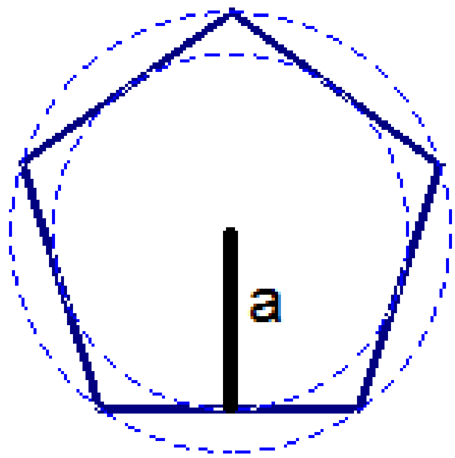
Ângulos notáveis

	30º	**45º**	**60º**
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Essa tabela deve ser memorizada.

POLÍGONOS REGULARES

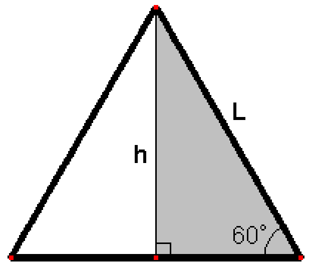
Um polígono convexo é **regular** se, e somente se, tem todos os lados congruentes e todos os ângulos congruentes.



CENTRO de um polígono regular é o centro das circunferências inscrita e circunscrita a esse polígono.

APÓTEMA de um polígono regular é o segmento que une o centro do polígono ao ponto médio de um de seus lados. É o raio da circunferência inscrita.

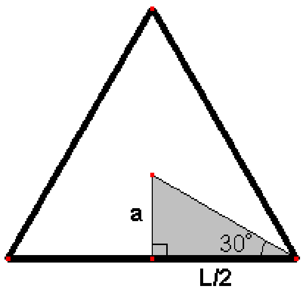
Triângulo Equilátero



A **altura** do triângulo eqüilátero pode ser obtida a partir do triângulo destacado:

$$sen60^\circ = \frac{h}{L}$$

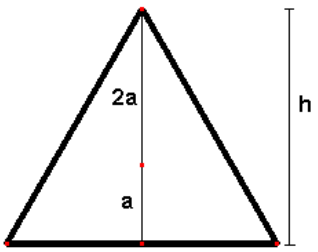
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{L} \Rightarrow h = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$



O **apótema** do triângulo eqüilátero pode ser obtido a partir do triângulo destacado:

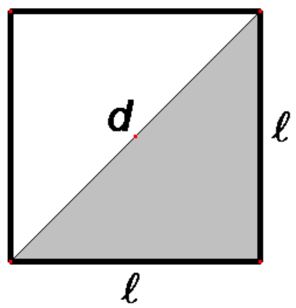
$$tg30^\circ = \frac{a}{L/2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{L/2} \Rightarrow a = \frac{L\sqrt{3}}{6}$$



É importante destacar que em um triângulo eqüilátero o **apótema** corresponde a **um terço da altura**.

Quadrado

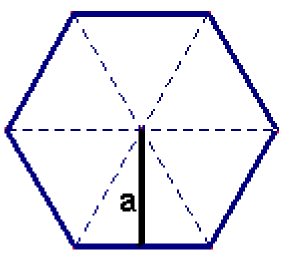


$$d^2 = \ell^2 + \ell^2$$

$$d^2 = 2 \cdot \ell^2$$

$$d = \ell \cdot \sqrt{2}$$

Hexágono Regular



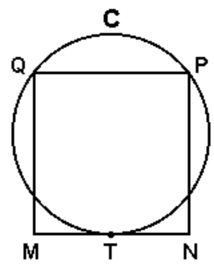
Todo hexágono regular pode ser dividido em seis triângulos eqüiláteros. Seu apótema corresponde à altura de um dos triângulos eqüiláteros que o formam.

EXERCÍCIOS DE AULA

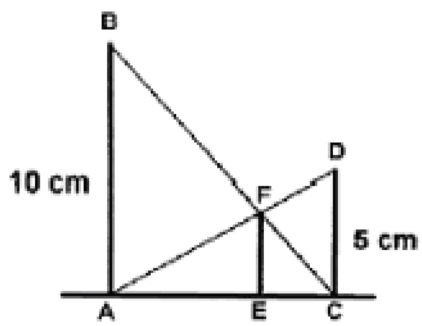
01) (UFRGS) O perímetro do triângulo equilátero circunscrito a um círculo de raio 3 é:

a) $18\sqrt{3}$ b) $20\sqrt{3}$ c) 36 d) $15\sqrt{6}$ e) 38

02) (UFF) Seja MNPQ um quadrado de lado igual a 2 cm. Considere C o círculo que contém os vértices P e Q do quadrado e o ponto médio do lado MN (ponto T). Determine o raio do círculo C.



03) (UFRGS) Na figura, AB, CD e EF são paralelos. AB e CD medem, respectivamente, 10 cm e 5 cm. O comprimento EF é:



a) $\frac{5}{3}$

b) 2

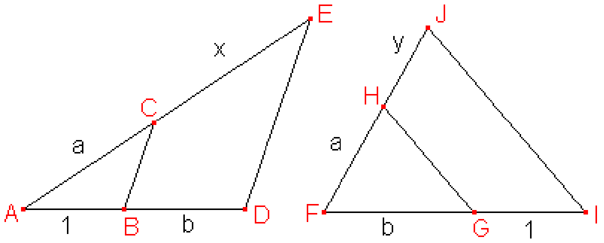
c) 3

d) $\frac{10}{3}$

e) 4

EXERCÍCIOS

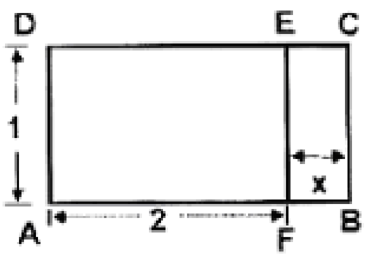
01) (UFRGS) Na fig. 1, BC é paralelo a DE e, na fig. 2, GH é paralelo a IJ. Então, x e y valem, respectivamente,



a) ab e $\frac{a}{b}$ b) ab e $\frac{b}{a}$ c) $\frac{a}{b}$ e ab

d) $\frac{b}{a}$ e ab e) $\frac{a}{b}$ e $\frac{1}{b}$

02) (UFRGS) Se os retângulos ABCD e BCEF são semelhantes, e AD = 1, AF = 2 e FB = x, então x vale:

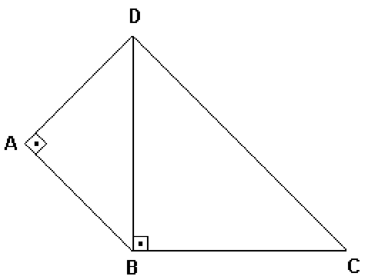


a) $-1+\sqrt{2}$
b) 1
c) $\sqrt{2}$
d) $1+\sqrt{2}$
e) 2

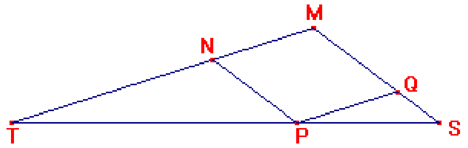
03) (PUCRJ) A maior distância entre dois pontos de um retângulo de base 8 cm e altura 6 cm é, em cm:

a) 14 b) 10 c) 7 d) 11 e) 12

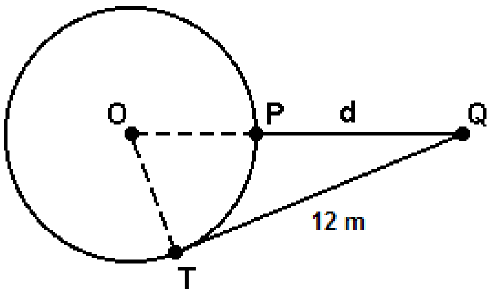
04) (UFPE) Na figura, ABD e BCD são triângulos retângulos isósceles. Se AD = 4, qual é o comprimento de DC?



05) (MACK) na figura ao lado, MNPQ é um losango. Se MT = 12 e MS = 6, quanto mede cada lado do losango?

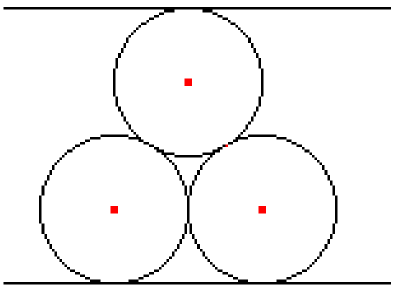


06) (UNESP) Em uma residência, há uma área de lazer com uma piscina redonda de 10 m de diâmetro. Nessa área há um coqueiro, representado na figura por um ponto Q. Se a distância de Q (coqueiro) ao ponto de tangência T (da piscina) é 12 m, a distância d = QP, do coqueiro à piscina, é, em metros:



a) 8
b) 9
c) 10
d) 11
e) 12

07) (UFRGS) Na figura, os três círculos têm o mesmo raio **r**, as retas são paralelas, os círculos são tangentes entre si e cada um deles é tangente a uma das duas retas. Dentre as alternativas abaixo, a melhor aproximação para a distância entre as retas é



a) 3r
b) 3,25r
c) 3,5r
d) 3,75r
e) 4r

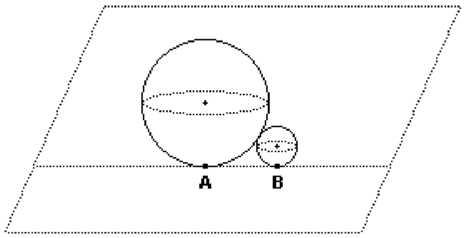
08) (UEL) Se um círculo de 5 cm de raio está inscrito em um hexágono regular, o perímetro do hexágono, em centímetros, é igual a:

a) $20\sqrt{3}$ b) $18\sqrt{3}$ c) $15\sqrt{2}$ d) $12\sqrt{3}$ e) $9\sqrt{2}$

09) (UNESP) A distância entre dois lados paralelos de um hexágono regular é igual a $2\sqrt{3}$ cm. A medida do lado desse hexágono, em centímetros, é:

a) $\sqrt{3}$ b) 2 c) 2,5 d) 3 e) 4

10) (FUVEST) No jogo de bocha, disputado num terreno plano, o objetivo é conseguir lançar uma bola de raio 8 o mais próximo possível de uma bola menor, de raio 4. Num lançamento, um jogador conseguiu fazer com que as duas bolas ficassem encostadas, conforme ilustra a figura abaixo. A distância entre os pontos A e B, em que as bolas tocam o chão, é:



a) 8
b) $6\sqrt{2}$
c) $8\sqrt{2}$
d) $4\sqrt{3}$
e) $6\sqrt{3}$

GABARITO

01	A	**02**	A	**03**	B	**04**	8	**05**	4
06	A	**07**	D	**08**	A	**09**	B	**10**	C