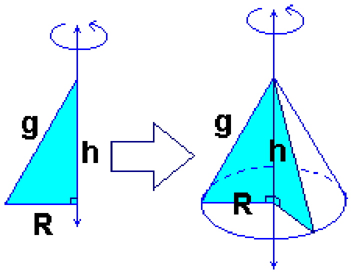
## AULA 7 - GEOMETRIA ESPACIAL

## CONE DE REVOLUÇÃO

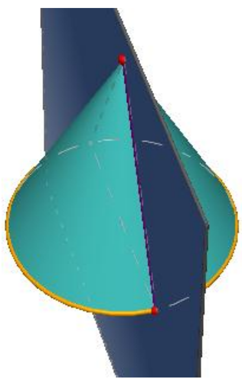
É um sólido gerado pela rotação completa de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos.



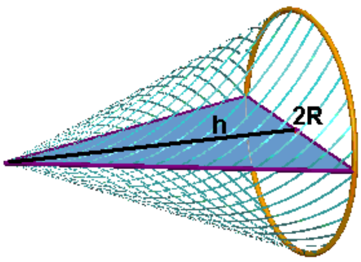

**Elementos:**

**R** é o raio da base
**g** é a geratriz
**h** é a altura

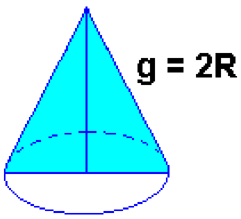
### Seção Meridiana



É um triângulo isósceles com base igual ao diâmetro da base do cone e altura igual à altura do cone.



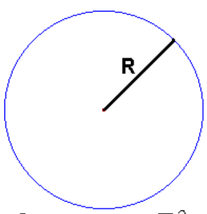

### Cone Eqüilátero




A geratriz é igual a um diâmetro da base. A seção meridiana de um cone eqüilátero é um **triângulo eqüilátero de lado igual ao diâmetro (2R)**.

### RELAÇÕES MÉTRICAS

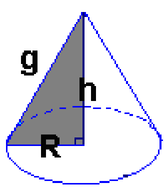
**Base**




$A_{BASE} = \pi \cdot R^2$

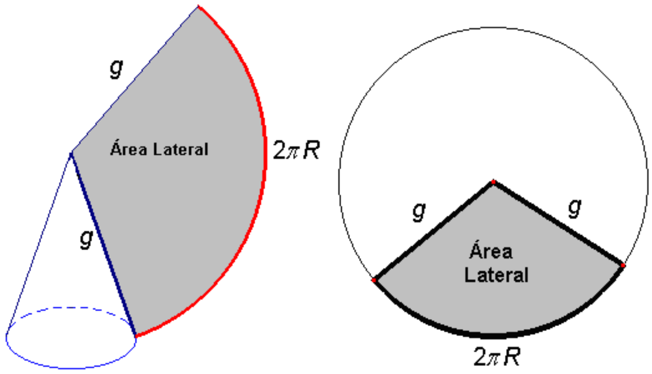
$C_{BASE} = 2 \cdot \pi \cdot R$

**Triângulo Retângulo Original**




$g^2 = h^2 + R^2$

### Área Lateral




A **área lateral** de um cone equivale a um setor circular de raio *g* e arco *2πR*. Esse setor, por definição, é parte de um círculo de raio também igual a g. Nesse círculo, $A = \pi \cdot g^2$ e $C = 2 \cdot \pi \cdot g$. Assim, como as medidas correspondentes de um setor e de um círculo são proporcionais, $\frac{A_{LATERAL}}{\pi \cdot g^2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{2 \cdot \pi \cdot g} \Rightarrow A_{LATERAL} = \pi \cdot g^2 \cdot \frac{R}{g}$.

Logo, $A_{\substack{LATERAL \\ DO\ CONE}} = \pi \cdot R \cdot g$.

### Área Total

A **área total** é obtida somando à área lateral a área da única base. Assim, $\mathbf{A_T = A_L + A_B}$.

### Volume

A relação entre os volumes de prismas e pirâmides de mesmas base e altura continua válida para **cilindros** e **cones** com tais características.

Assim, o volume de qualquer cone vale $\mathbf{V = \frac{A_B \times h}{3}}$.

$$V = \frac{A_B \cdot h}{3} \Leftrightarrow V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3}$$

**EXERCÍCIOS DE AULA**

**01)** Calcule o volume do sólido gerado pela rotação completa de um triângulo eqüilátero de lado 2 em torno de um de seus lados.

**02)** Calcule a medida da geratriz de um cone eqüilátero de volume $72\pi\sqrt{3}$.

**SEÇÃO TRANSVERSAL**

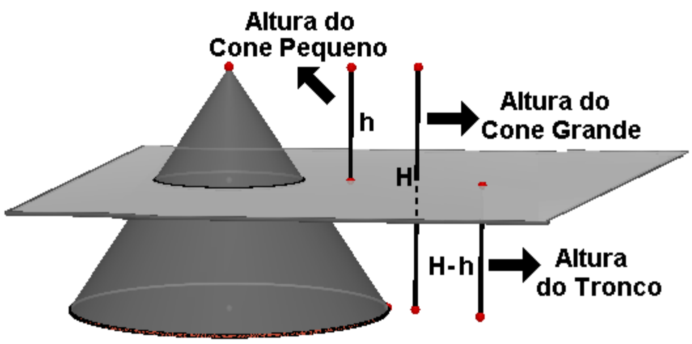
A seção transversal de um cone destaca três sólidos: o cone original, o cone separado pela seção (a "ponta") e o tronco, sólido que é formado ao se retirar o cone pequeno do grande.

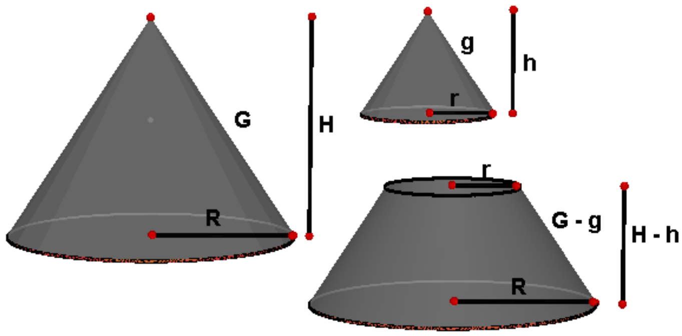
Com isso, as mesmas relações de proporção aplicadas às seções transversais de pirâmides podem ser aplicadas aqui. Na verdade, tais relações podem ser utilizadas para qualquer dupla de sólidos, tendo como única exigência a semelhança entre eles, como dois cubos ou duas esferas. Lembrando quais são as proporções:

$$\frac{COMPRIMENTO_A}{COMPRIMENTO_B} = \frac{COMPRIMENTO_A}{COMPRIMENTO_B}$$

$$\left(\frac{COMPRIMENTO_A}{COMPRIMENTO_B}\right)^2 = \frac{AREA_A}{AREA_B}$$

$$\left(\frac{COMPRIMENTO_A}{COMPRIMENTO_B}\right)^3 = \frac{VOLUME_A}{VOLUME_B}$$



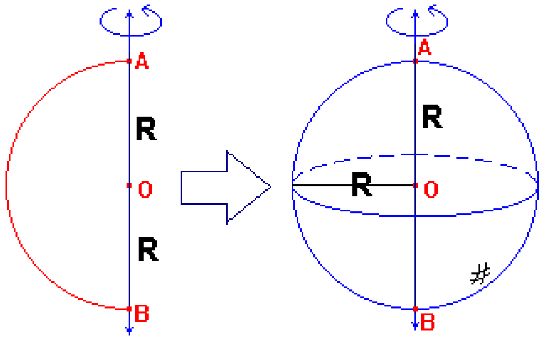



#### EXERCÍCIOS DE AULA

**03)** A que distância do vértice deve-se cortar um cone de altura de medida H, por um plano paralelo à base, de modo que a área da base do cone destacado seja $\frac{1}{9}$ da área da base do cone dado?

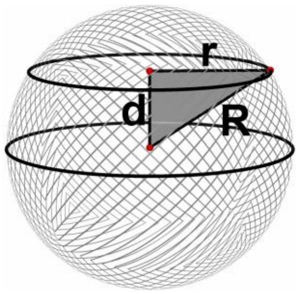
## ESFERAS

Uma **esfera** é um sólido gerado pela rotação completa de um semicírculo em torno de um eixo que contém seu diâmetro.



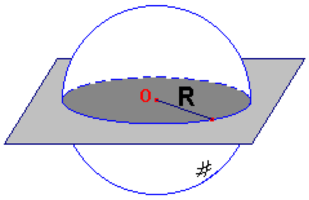

**O** é o centro da esfera.
**AO = R** é um raio da esfera.
**AB = 2R** é um diâmetro da esfera.

#### Seção Plana




Toda seção plana de uma esfera é um círculo.

**R** é o raio da esfera, **r** é o raio da seção plana e **d** é a distância entre o centro da esfera e o centro da seção plana.




Obs. Se o plano secante passa pelo centro da esfera, a seção plana é dita **círculo máximo** da esfera, e seu raio é igual ao raio da esfera.

Essa seção pode ser chamada de **seção meridiana**.

#### RELAÇÕES MÉTRICAS

Área de uma superfície esférica → $A = 4.\pi.R^2$

Volume de uma esfera → $V = \frac{4}{3}.\pi.R^3$

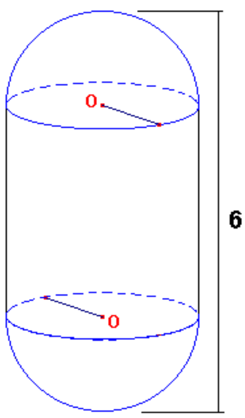
Como duas esferas A e B sempre são **semelhantes**, sabe-se que $\left(\frac{RAIO_A}{RAIO_B}\right)^3 = \frac{VOLUME_A}{VOLUME_B}$.

## EXERCÍCIOS DE AULA

**04)** (UFRGS) Uma esfera de volume $36\pi$ está inscrita em cilindro de volume igual a

a) $9\pi$  b) $18\pi$  c) $24\pi$  d) $54\pi$  e) $60\pi$

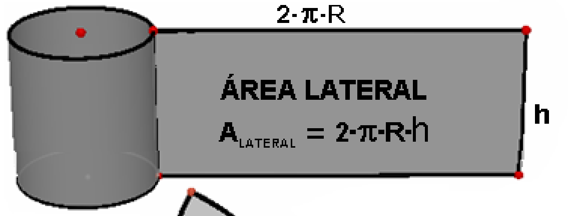
**05)** Uma caldeira cilíndrica terminada por dois hemisférios tem comprimento 6. Se a área total dessa caldeira vale $12\pi$, calcule seu volume.

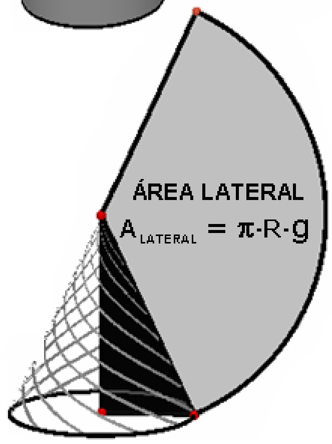


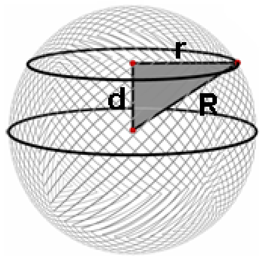

## FORMULÁRIO - GEOMETRIA ESPACIAL

$$\text{VOLUME}_{\text{PRISMAS E CILINDROS}} = A_{\text{BASE}} \cdot A_{\text{LTURA}}$$

$$\text{VOLUME}_{\text{PIRAMIDES E CONES}} = \frac{A_{\text{BASE}} \cdot A_{\text{LTURA}}}{3}$$



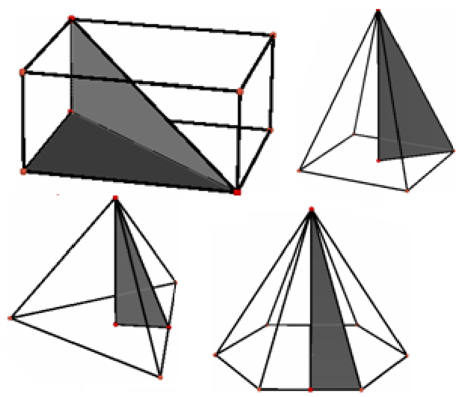




$\text{ÁREA} = 4 \cdot \pi \cdot R^2$

$\text{VOLUME} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$

### ALGUNS TRIÂNGULOS RETÂNGULOS



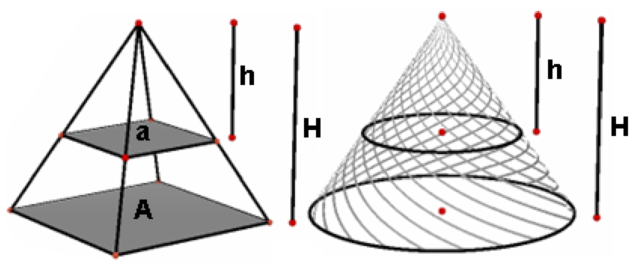
### SÓLIDOS SEMELHANTES

Se **A** e **B** são dois sólidos semelhantes, temos que:

$$\frac{\text{COMPRIMENTO}_A}{\text{COMPRIMENTO}_B} = \frac{\text{COMPRIMENTO}_A}{\text{COMPRIMENTO}_B}$$

$$\left(\frac{\text{COMPRIMENTO}_A}{\text{COMPRIMENTO}_B}\right)^2 = \frac{\text{AREA}_A}{\text{AREA}_B}$$

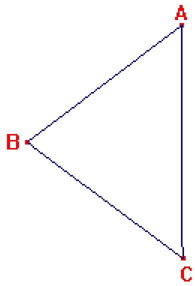
$$\left(\frac{\text{COMPRIMENTO}_A}{\text{COMPRIMENTO}_B}\right)^3 = \frac{\text{VOLUME}_A}{\text{VOLUME}_B}$$



**EXERCÍCIOS**

**01)** Calcule o volume do sólido gerado pela rotação de um triângulo retângulo, de catetos medindo $\frac{5}{2}$ e 6, em torno do cateto menor.

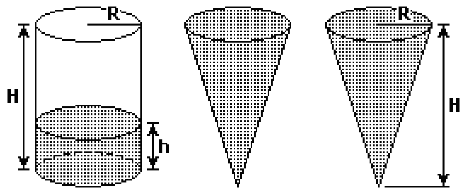
**02)** (PUCSP) Considere o triângulo isósceles ABC, tal que AB = BC = 10 cm e AC = 12 cm. A rotação completa desse triângulo em torno de um eixo que contém o lado AC gera um sólido. Calcule seu volume.




**03)** (UFRGS) Uma ampulheta pode ser considerada como formada por 2 cones retos idênticos, unidos pelo vértice, inscritos em um cilindro reto. A razão entre o volume de um dos cones e o volume do cilindro é:

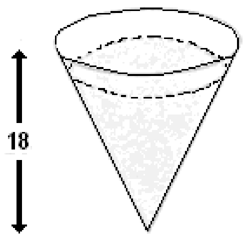
a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{1}{8}$

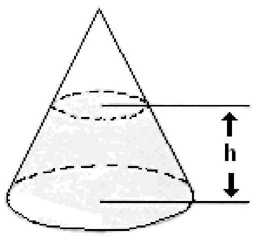
**04)** (UFLA) Parte do líquido de um cilindro completamente cheio é transferida para dois cones idênticos, que ficam totalmente cheios. A relação entre as alturas do líquido restante no cilindro (h) e a altura do cilindro (H) é:




a) $h = \frac{H}{4}$ b) $h = \frac{H}{2}$ c) $h = \sqrt{\frac{H}{2}}$ d) $h = \frac{H}{3}$

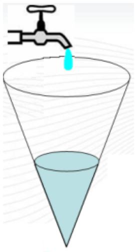
**05)** (UFRGS) A areia contida em um cone fechado, de altura 18 cm, ocupa 7/8 da capacidade do cone. Voltando-se o vértice do cone para cima, conforme indica a figura, a altura **h** do tronco de cone ocupado pela areia, em centímetros, é:



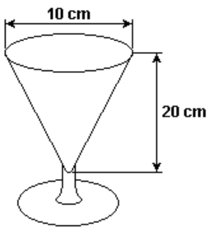




a) 7
b) 8
c) 9
d) 10
e) 11

**06)** Uma taça cônica está situada abaixo de uma torneira com seu vértice para baixo. A torneira pinga de modo que após 30 minutos a água atinge metade da altura da taça. Quantos minutos mais se deve esperar para que a taça esteja completamente cheia?

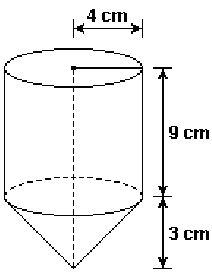


**07)** (UFSCAR) Em uma lanchonete, um casal de namorados resolve dividir uma taça de milk-shake com as dimensões mostradas na figura.




Se um deles beber sozinho até a metade da altura do copo, quanto do volume total, em porcentagem, terá bebido?

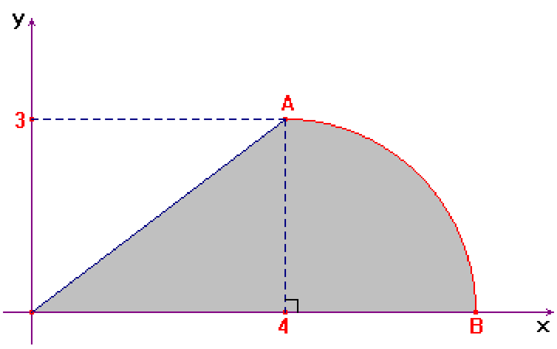
**08)** (UNESP) Um paciente recebe por via intravenosa um medicamento à taxa constante de 1,5 ml/min. O frasco do medicamento é formado por uma parte cilíndrica e uma parte cônica, cujas medidas são dadas na figura, e estava cheio quando se iniciou a medicação. Após 4h de administração contínua, a medicação foi interrompida. Dado que 1 $cm^3$ = 1 ml, e usando a aproximação $\pi = 3$, o volume, em ml, do medicamento restante no frasco após a interrupção da medicação é, aproximadamente:



(figura fora de escala)

a) 120 b) 150 c) 160 d) 240 e) 360

**09)** Considere a região do plano cartesiano limitada pelo segmento de reta AO, arco de circunferência AB e pelo eixo das abscissas, conforme figura. Qual o volume do sólido gerado pela rotação completa dessa região em torno do eixo x?

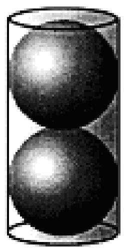


**10)** (FUVEST) Um recipiente cilíndrico cujo raio da base é 6 contém água até uma certa altura. Uma esfera de aço é colocada no interior do recipiente, ficando totalmente submersa. Se a altura da água subiu 1, quanto vale o raio da esfera?

**11)** (UFRGS) Considere uma esfera inscrita num cubo. Dentre as alternativas abaixo, a melhor aproximação para a razão entre o volume da esfera e o volume do cubo é:

a) 2/5 b) 1/2 c) 3/5 d) 2/3 e) 3/4

**12)** (UFRGS) Duas esferas de raio **r** foram colocadas dentro de um cilindro circular reto com altura **4r**, raio da base **r** e espessura desprezível, como na figura. Nessas condições, a razão entre o volume do cilindro não ocupado pelas esferas e o volume das esferas é:



a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{2}{3}$

**13)** (UFRGS) Certa quantidade de queijo é vendida em embalagens esféricas com 2 tamanhos. A embalagem menor tem capacidade para 250g de queijo, e seu raio é metade do raio da maior. A quantidade total de queijo que a embalagem maior pode conter é

a) 500g b) 1kg c) 1,250kg d) 1,500kg e) 2kg

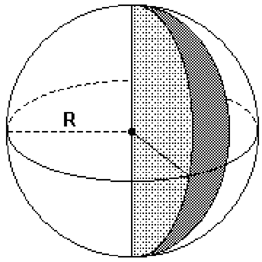
**14)** (UFU) Uma esfera maciça de ferro de raio 10 cm será fundida e todo o material derretido será usado na confecção de um cilindro e de um cone maciços com raio da base *r* cm e altura também *r* cm. Não havendo perda de material durante o processo, r será igual a:

a) 4 cm b) 8 cm c) 5 cm d) 10 cm

**15)** (UFC) Um vaso em forma de cilindro circular reto tem medida de raio da base 5 cm, altura 20 cm e contém água até a altura de 19 cm (despreze a espessura das paredes do vaso). O maior número de esferas de aço, de 1 cm de raio, que podemos colocar no vaso a fim de que a água não transborde é:

a) 14 b) 15 c) 16 d) 17 e) 18

**16)** (UNESP) Uma quitanda vende fatias de melancia embaladas em plástico transparente. Uma melancia com forma esférica de raio de medida R cm foi cortada em 12 fatias iguais, onde cada fatia tem a forma de uma cunha esférica, como representado na figura. Se a área de uma superfície esférica de raio R cm é $4\pi R^2$ cm², determine quantos cm² de plástico foram necessários para embalar cada fatia (sem nenhuma perda e sem sobrepor camadas de plástico), ou seja, qual é a área da superfície total de cada fatia.




**GABARITO**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **01** | $30\pi$ | **02** | $256\pi$ | **03** | D | **04** | D |
| **05** | C | **06** | 210 | **07** | 87,5% | **08** | A |
| **09** | $30\pi$ | **10** | 3 | **11** | B | **12** | D |
| **13** | E | **14** | D | **15** | E | **16** | $\frac{4\pi R^2}{3}$ |