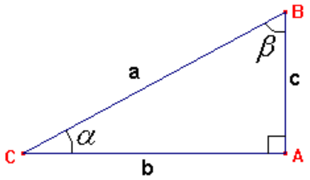
AULA 8 - TRIGONOMETRIA

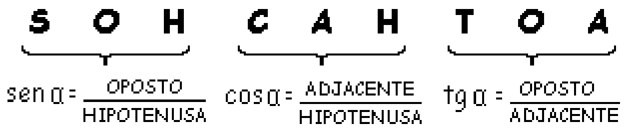
TRIÂNGULO RETÂNGULO



$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{CATETO OPOSTO AO ÂNGULO }\alpha}{\text{HIPOTENUSA}}.$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{CATETO ADJACENTE AO ÂNGULO }\alpha}{\text{HIPOTENUSA}}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{CATETO OPOSTO AO ÂNGULO }\alpha}{\text{CATETO ADJACENTE AO ÂNGULO }\alpha}$$



$$sen\alpha = \frac{c}{a} = \cos\beta$$
$$sen\beta = \frac{b}{a} = \cos\alpha$$
$$tg\alpha = \frac{c}{b} = \frac{1}{tg\beta}$$

Tais igualdades não são casuais: repare que o cateto adjacente ao ângulo α é oposto ao ângulo β. Assim, quando trabalhamos com ângulos complementares, temos que

$$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\,\alpha = \cos\beta \\ \text{sen}\,\beta = \cos\alpha \\ \text{tg}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{tg}\,\beta} \end{cases}$$

	30º	45º	60º
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

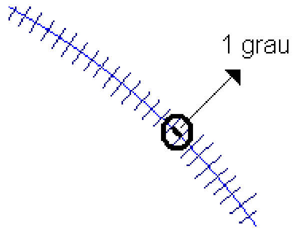
TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA

COMO MEDIR UM ARCO

Medir um arco de circunferência é compará-lo com um arco adotado como unitário situado na mesma circunferência. Logo, a medida do arco depende do arco unitário escolhido. Os arcos unitários mais utilizados são o **grau** e o **radiano**.

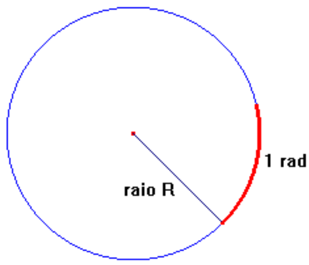
Grau

Grau é o arco unitário que corresponde a $\frac{1}{360}$ da circunferência.



Radiano

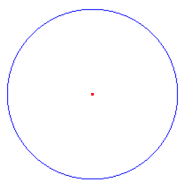
Radiano é o arco unitário cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que o contém.



Assim, sendo **L** o comprimento do arco AB, sua medida pode ser calculada pela seguinte relação:

$$\alpha_{RAD} = \frac{L}{R}$$

Obs. O comprimento de uma circunferência é dado por $C = 2\pi.r$; sendo assim, a medida do arco máximo, em radianos, é:



$$\text{ARCO MÁXIMO} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi \text{ rad}$$

Conversão de Unidades

Basta lembrar que o arco máximo mede 360º ou 2π *rad* . Logo, 180º equivalem a π *rad* .

EXERCÍCIO DE AULA:

01) (UFRGS) A medida do lado de um pentágono regular inscrito num círculo de raio igual a 1 é:

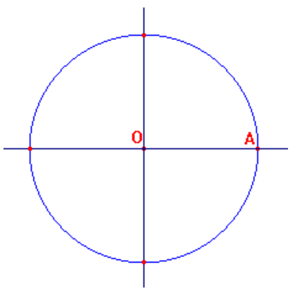
a) $2\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{5}$ b) $2\cos\dfrac{\pi}{5}$ c) $\sqrt{2}\cos\dfrac{2\pi}{5}$

d) $\sqrt{2}\,\text{sen}\,\dfrac{2\pi}{5}$ e) $\cos\dfrac{2\pi}{5}$

CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA

Considere no plano cartesiano uma circunferência de centro O (0,0) e raio igual a 1. Sobre ela, são marcados os arcos trigonométricos que:

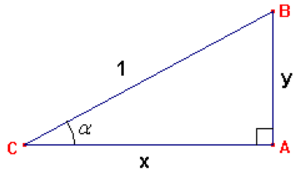
- têm origem no ponto A (1,0)
- têm medidas algébricas positivas, se marcados no sentido anti-horário
- têm medidas algébricas negativas, se marcados no sentido horário.



Essa circunferência é chamada de **circunferência trigonométrica**.

SENO E COSSENO NA CIRCUNFERÊNCIA

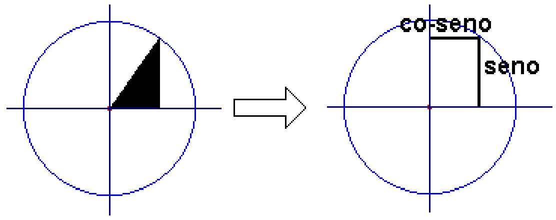
Seja o triângulo ABC, retângulo em A:



$$\cos\alpha = \frac{x}{1} \Rightarrow x = \cos\alpha$$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{y}{1} \Rightarrow y = \text{sen}\,\alpha$$

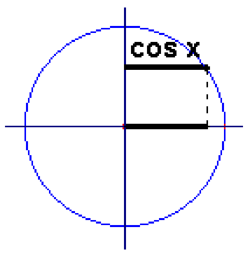
Observe que, se a medida da hipotenusa for igual a 1, o **seno** será a medida do **cateto oposto**, e o **cosseno** a do **cateto adjacente** ao ângulo de medida α. Ao localizar tal triângulo na circunferência trigonométrica, podemos agora fazer uma extensão dos conceitos de seno e cosseno para arcos maiores que 90º.

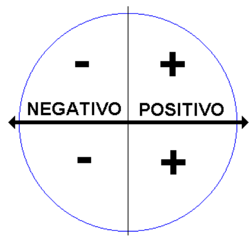


$$CO-SENO \Leftrightarrow \underbrace{EIXO\ \ X}_{HORIZONTAL} \qquad SENO \Leftrightarrow \underbrace{EIXO\ \ Y}_{VERTICAL}$$

Definições

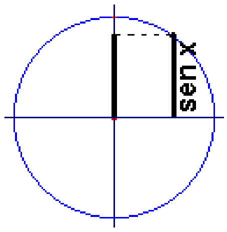
Cosseno do arco de medida **x** é a **abscissa** do ponto correspondente ao arco em questão.

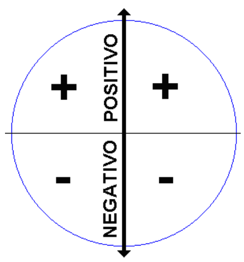




O estudo do sinal e do valor do cosseno deve ser feito considerando sua projeção no eixo X.

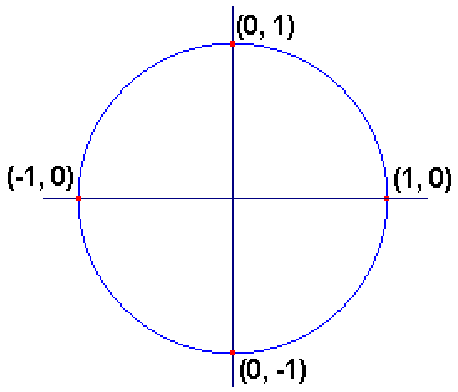
Seno do arco de medida **x** é a **ordenada** do ponto correspondente ao arco em questão.





O estudo do sinal e do valor do seno deve ser feito considerando sua projeção no eixo Y.

Pontos Extremos dos Quadrantes



Como nestes casos são facilmente conhecidos os pares ordenados, o resultado é imediato.

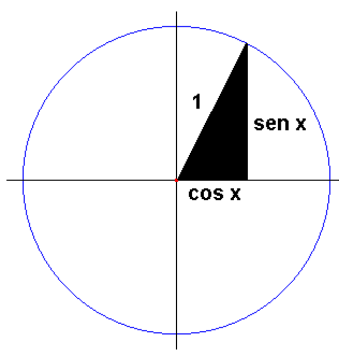
	Cos	sen		cos	sen
$0^\circ\ (0) \big/ 360^\circ\ (2\pi)$	1	0	$90^\circ \left(\frac{\pi}{2}\right)$	0	1
$180^\circ\ (\pi)$	-1	0	$270^\circ \left(\frac{3\pi}{2}\right)$	0	-1

A partir desse raciocínio, é possível compreender porque os valores máximo e mínimo para seno e cosseno são 1 e -1.

Redução ao primeiro quadrante

Usando a simetria estudada anteriormente, podemos relacionar o seno e o cosseno de arcos de qualquer quadrante com valores do primeiro quadrante: basta considerar o **sinal** e o **arco simétrico** (SEMPRE em relação ao eixo horizontal).

Relação Fundamental da Trigonometria



Do triângulo retângulo destacado inicialmente e do Teorema de Pitágoras, é imediato concluir que:

$$(sen\,x)^2 + (\cos x)^2 = 1$$
$$sen^2\,x + \cos^2 x = 1$$

Obs.: $(sen\,x)^2 = sen^2 x \neq sen\left(x^2\right)$

EXERCÍCIOS DE AULA:

02) (UFBA) Se $x = \frac{8\pi}{3}$ radianos, o valor da expressão $\frac{sen\,x - \cos x}{sen\,x + \cos x}$ é um número real pertencente ao intervalo:

a) $[4;+\infty]$ b) $[3;4]$ c) $\left[\frac{1}{2};3\right]$

d) $\left]-\sqrt{3};\frac{1}{2}\right[$ e) $\left]-\infty;-\sqrt{3}\right[$

03) (UFRGS) Sabendo-se que $\cos(a) = \frac{3}{5}$ e que a é um arco do primeiro quadrante, o valor de tan(a) é:

a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{5}{3}$ e) $\frac{5}{4}$

04) (UFRGS) Considere as seguintes afirmações para arcos medidos em radianos:

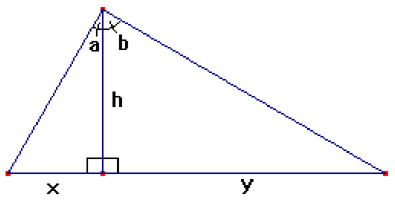
I) sen 1 < sen 3 II) cos 1 < cos 3 III) cos 1 < sen 1

Quais são verdadeiras?

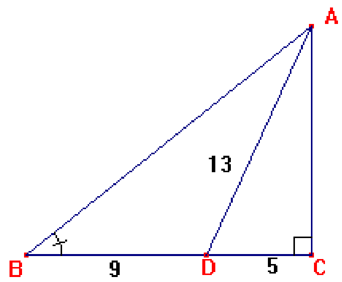
a) I b) II c) III d) Só I e II e) I, II e III

EXERCÍCIOS

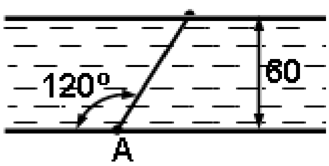
01) Na figura, $h = \sqrt{2}$, a = 30º e b = 60º. Calcule a medida **x + y**.



02) Calcule o valor da tangente do ângulo B.



03) (UFRGS) Um barco parte de A para atravessar o rio. A direção de seu deslocamento forma um ângulo de 120º com a margem do rio. Se a largura do rio é 60 m, a distância, em metros, percorrida foi de:



a) $40\sqrt{2}$

b) $40\sqrt{3}$

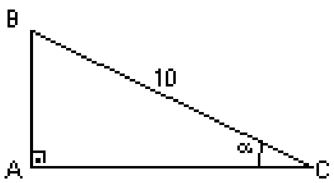
c) $45\sqrt{3}$

d) $50\sqrt{3}$

e) $60\sqrt{2}$

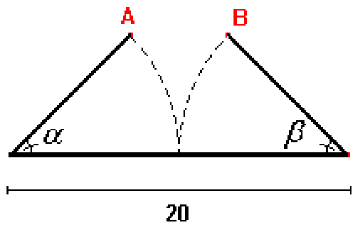
04) (UFRGS) No triângulo retângulo da figura, $\overline{BC} = 10$ cm e cos(α) = 0,8. O valor de $\overline{AB}$ é

a) 8
b) 6
c) 5
d) 4
e) 2



05) (PUCRS) Uma ponte sobre um rio tem comprimento de 20 m e abre-se a partir de seu centro para dar passagem a algumas embarcações, provocando um vão AB. No momento em que os ângulos $\alpha = \beta = 45^\circ$, o vão AB mede, em metros:

a) $20 - 5\sqrt{2}$
b) $10 - 5\sqrt{2}$
c) $20 - 10\sqrt{2}$
d) $20 - 20\sqrt{2}$
e) 10

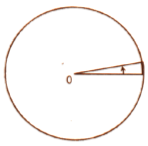
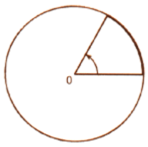
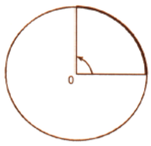


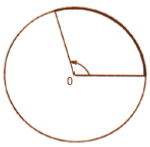
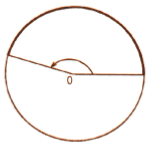
06) (UNICAMP-SP) Um relógio foi acertado exatamente ao meio-dia. Determine as horas e minutos que estará marcando esse relógio após o ponteiro menor ter percorrido um ângulo de 42º.

07) (UFRGS) Se o ponteiro menor de um relógio percorre um arco de $\frac{\pi}{12}$ rad, o ponteiro maior percorre um arco, em radianos, de

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{3}$ d) $\frac{\pi}{2}$ e) π

08) (UFRGS) Dentre os desenhos abaixo, aquele que representa o ângulo que tem medida mais próxima de 1 radiano é:

a)  b)  c) 

d)  e) 

09) (UFRGS) O número real **cos 3** está entre:

a) -1 e $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e 0

d) 0 e $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e 1

10) Calcular sen x, sabendo que $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ e $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$.

11) Se $\cos x = -\frac{2}{3}$ e $\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}$, calcule sen x.

12) (PUCRS) Sendo $\cos x = \frac{1}{m}$ e $sen\, x = \frac{\sqrt{m+1}}{m}$, determine a soma dos possíveis valores de m.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

GABARITO

01	$\frac{4\sqrt{6}}{3}$	**02**	$\frac{6}{7}$	**03**	B	**04**	B
05	C	**06**	1h24min			**07**	E
08	B	**09**	A	**10**	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$	**11**	$\frac{-\sqrt{5}}{3}$
12	B						