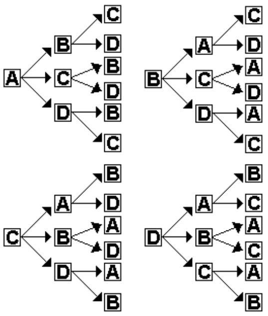
AULA 1 - ANÁLISE COMBINATÓRIA

Considere os dois problemas abaixo:

Em uma corrida envolvendo quatro corredores, quantas são as possibilidades de pódio?



Para *cada* possível 1º lugar, existem três possíveis 2ºs lugares e, para *cada* um desses segundos, duas opções para 3º colocado. Como mostra o diagrama, são 24 pódios distintos.

Em um grupo de quatro alunos, conseguimos formar quantos trios diferentes?

ABC
ABD
ACD
CBD

Para a resolução desse problema, a estratégia anterior não funciona, pois as escolhas não possuem **hierarquia** entre si: ser o primeiro, o segundo ou terceiro do trio é indiferente. Observe que no problema anterior a primeira escolha é diferenciada das demais, assim como *cada* escolha é diferenciada das demais. Em tempo: a resposta do problema, como mostram as possibilidades listadas acima, é 4.

A análise combinatória distingue dois tipos de agrupamentos: seqüências e conjuntos.

Seqüências

São agrupamentos que se diferenciam pelos elementos componentes ou pela **ordem** desses elementos. Por exemplo, (A, B) ≠ (B, A) pela ordem em que aparecem e (A, B) ≠ (A, C) pelos elementos escolhidos. Observe que ordem implica **hierarquia** entre escolhas: a ordem somente é importante quando **cada escolha tiver uma função diferente no problema**.

Conjuntos

São agrupamentos que se diferenciam somente pelos elementos componentes. No mesmo exemplo anterior, {A, B} = {B, A} e {A, B} ≠ {A, C}. A ordem aqui não é importante. Ou seja, não existe **hierarquia** e, com isso, cada escolha desempenha o mesmo papel no problema.

PRÍNCIPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

O raciocínio utilizado para a resolução do primeiro problema é muito importante para resolver *qualquer* problema de Análise Combinatória.

Considere um problema onde **n decisões independentes** devem ser tomadas. Para cada uma dessas decisões existem $d_1, d_2, d_3, ..., d_{n-1}, d_n$ opções de escolha. Tendo em mente a ramificação das escolhas (ou árvore de possibilidades) apresentada anteriormente, sabe-se que a 1ª escolha possui d_1 possibilidades, que se ramificam em d_2 opções para a 2ª, que por sua vez se ramificam em d_3 para a 3ª, e assim sucessivamente, até se ramificar em d_n possibilidades para a n-ésima e última escolha.

Assim, n decisões independentes com $d_1, d_2, ..., d_n$ opções de escolha cada geram um total de $d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot ... \cdot d_{n-1} \cdot d_n$ seqüências. Observe que esse é o número de seqüências e não de conjuntos, pois as decisões são independentes. Ou seja, há hierarquia entre elas.

EXERCÍCIOS DE AULA

01) Dos seis funcionários de um colégio, um deles deve ser escolhido por dia para realizar o hasteamento da bandeira durante os cinco dias da semana da Pátria. Se ninguém pode participar em dias consecutivos, de quantos modos é possível organizar a escala?

02) Quantos números naturais de quatro algarismos distintos existem?

03) Quantos são os números naturais pares que se escrevem com 3 algarismos distintos?

04) Em quantos números de quatro algarismos o algarismo “5” aparece pelo menos uma vez?

05) Três irmãos pertencem a um grupo de 5 alunos que se posicionarão em fila indiana.

a) Quantas possíveis filas apresentam os irmãos juntos e em ordem cronológica crescente?

b) Quantas possíveis filas apresentam os irmãos juntos?

Notação Fatorial

$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, com n natural.

Além da definição algébrica para fatorial, deve ser compreendida também a definição combinatória:

n! é o número de seqüências com n elementos distintos que formamos a partir de n elementos.

Por exemplo, $4! \Leftrightarrow \frac{4}{\,} \cdot \frac{3}{\neq E_1} \cdot \frac{2}{\substack{\neq E_1 \\ \neq E_2}} \cdot \frac{1}{\substack{\neq E_1 \\ \neq E_2 \\ \neq E_3}} = 24$.

Observe ainda que cada fatorial contém todos os fatoriais anteriores. Por exemplo,

$$5! = 5 \cdot \underbrace{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{4! = 4 \cdot \underbrace{3 \cdot 2 \cdot 1}_{3! = 3 \cdot \underbrace{2 \cdot 1}_{2! = 2 \cdot \underbrace{1}_{1!}}}} = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 4 \cdot 3! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1! = 120$$

$\boxed{0! = 1! = 1}$

06) Uma estante conta com quatro livros de Matemática, três livros de Física e cinco de Química, todos distintos. De quantos modos é possível alinhá-los (todos cabem na estante!) mantendo juntos os livros da mesma disciplina?

TAREFA - AULA 1

01) Quantos números naturais pares de três algarismos distintos existem com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 9?

02) Com os algarismos pares, sem os repetir, quantos números naturais compreendidos entre 2000 e 7000 podem ser formados?

03) Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 10 questões de múltipla-escolha, com cinco alternativas por questão?

04) De quantos modos 3 pessoas podem sentar-se em 5 cadeiras em fila?

05) (MACK) A quantidade de números naturais de três algarismos com **pelo menos** dois algarismos iguais é:

a) 38 b) 252 c) 300 d) 414 e) 454

06) Quantos são os números de 5 algarismos nos quais o algarismo "2" aparece?

07) (UFRGS) Os números dos telefones de uma cidade são constituídos por 6 dígitos. Sabendo que o primeiro dígito nunca pode ser zero e que os números dos telefones passarão a ser de 7 dígitos, o aumento possível na quantidade dos telefones será:

a) $81 . 10^3$ b) $90 . 10^3$ c) $81 . 10^4$
d) $81 . 10^5$ e) $90 . 10^5$

08) Resolver a equação $\frac{(p+2)!}{p!} = 72$.

09) (UNESP) Quatro amigos, Pedro, Luísa, João e Rita, vão ao cinema, sentando-se em lugares consecutivos na mesma fila. O número de maneiras que os quatro podem ficar dispostos de forma que Pedro e Luísa fiquem sempre juntos e João e Rita fiquem sempre juntos é:

a) 2 b) 4 c) 8 d) 16 e) 24

10) (UFBA) Com os dígitos 1, 2, 3, 4, 6 e 8, podem-se formar x números ímpares, com três algarismos distintos cada um. Determine x.

11) (UFES) De quantas maneiras 10 clientes de um banco podem se posicionar na fila única dos caixas de modo que as 4 mulheres do grupo fiquem juntas?

a) 4!.7! b) 5!.6! c) 6.6! d) 10.6! e) 4!+ 10!

12) (UFMG) Um clube resolve fazer uma Semana de Cinema. Para isso, os organizadores escolhem sete filmes, que serão exibidos um por dia. Porém, ao elaborar a programação, eles decidem que três desses filmes, que são de ficção científica, devem ser exibidos em dias consecutivos. Nesse caso, o número de maneiras DIFERENTES de se fazer a programação dessa semana é:

a) 144 b) 576 c) 720 d) 1040 e) 2080

13) (MACK) Uma prova de atletismo é disputada por 9 atletas, dos quais apenas 4 são brasileiros. Os resultados possíveis para a prova, de modo que **pelo menos** um brasileiro fique numa das três primeiras colocações, são em número de:

a) 426 b) 444 c) 468 d) 480 e) 504

14) (UFRN) Um fenômeno raro em termos de data ocorreu às 20h02min de 20 de fevereiro de 2002. No caso, 20:02 20/02 2002 forma uma seqüência de algarismos que permanece inalterada se reescrita de trás para a frente. A isso denominamos capicua. Desconsiderando as capicuas começadas por zero, a quantidade de capicuas formadas com cinco algarismos não necessariamente diferentes é:

a) 120 b) 720 c) 900 d) 1000 e) 1100

GABARITO

01	90	**02**	72	**03**	5^{10}	**04**	60
05	B	**06**	37512	**07**	D	**08**	7
09	C	**10**	40	**11**	A	**12**	C
13	B	**14**	C				

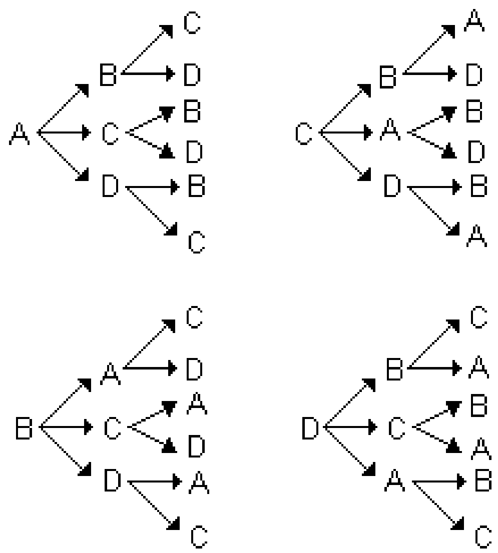
AULA 2 CONTAGEM DE CONJUNTOS

Quantas **seqüências** de 3 letras distintas formamos utilizando A, B, C e D?

$$\underset{A,\,B,\,C,\,D}{\underline{\;4\;}}\cdot\underset{\neq 1^a}{\underline{\;3\;}}\cdot\underset{\neq 1^a,\,2^a}{\underline{\;2\;}} = 24$$

ABC	BAC	CAB	DAB
ACB	BCA	CBA	DBA
ABD	BAD	CAD	DAC
ADB	BDA	CDA	DCA
ACD	BCD	CBD	DBC
ADC	BDC	CDB	DCB

Outra forma de visualizar os resultados é analisando a árvore de possibilidades correspondente ao problema.



Repare que quando formamos seqüências a **ordem** em que as escolhas são feitas **é relevante** para o problema. Por exemplo, as seqüências ABC e BAC possuem os mesmos elementos, mas a diferença de posição entre os elementos A e B faz com que as seqüências sejam diferentes. Ou seja, **existe uma diferença de hierarquia entre as escolhas**, pois o fato de um elemento ter sido listado na primeira, segunda ou terceira escolha é importante para o resultado final.

Vamos mudar agora a **essência** da pergunta inicial.

Quantos **conjuntos** de 3 letras distintas formamos utilizando A, B, C e D?

Como vimos, um conjunto é diferente do outro somente pelos elementos escolhidos. Ou seja, a **ordem** em que as escolhas foram feitas **é irrelevante para o resultado final**: {A, B, C} e {B, A, C} são o mesmo conjunto.

Dito isso, é possível perceber que a árvore de possibilidades da pergunta anterior não resolve a nova questão, pois **não existe hierarquia** entre as escolhas: ter sido o primeiro, o segundo ou o terceiro elemento escolhido não muda em nada o resultado final.

No entanto, basta descobrir *quantas seqüências são geradas por cada conjunto específico*. Tendo essa informação, não é difícil observar que o número de conjuntos é dado pela fórmula:

$$\text{Número de Conjuntos} = \frac{\text{Número de Seqüências}}{\text{Número de Seqüências por Conjunto}}$$

O número de seqüências por conjunto é simples de ser obtido: por exemplo, o conjunto {A, B, C} gera 6 seqüências distintas, ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA. Esse número não é difícil de ser calculado pelo PFC: {A, B, C} → $\dfrac{3}{A,B,C}\cdot\dfrac{2}{-1^o}\cdot\dfrac{1}{-1^o,-2^o} = 3! = 6$.

Esse cálculo é o mesmo para qualquer conjunto com 3 elementos distintos: $\dfrac{3}{}\cdot\dfrac{2}{-1^o}\cdot\dfrac{1}{-1^o,-2^o} = 3! = 6$. De modo geral, um conjunto com **n** elementos distintos gera **n! seqüências** com n elementos distintos.

Voltando ao problema inicial, sabemos que com A, B, C e D formamos 24 seqüências distintas. No entanto, observe que conjuntos como {A, B, C}, {B, C, A} e {A, C, B} estão sendo contados como *seqüências distintas*, mas são *conjuntos iguais*.

Como *cada* conjunto gera 3! = 6 seqüências distintas, o número de conjuntos distintos é $\dfrac{24}{6} = \dfrac{4\cdot 3\cdot 2}{3!} = 4$.

São eles: {A, B, C}, {A, B, D}, {A, C, D} e {B, C, D}.

Agora, generalizaremos nosso procedimento. Para resolver problemas onde a troca de posições não altera o resultado final (onde não existe hierarquia entre as escolhas), devemos fazer o seguinte:

01) Calcular, primeiramente, quantas seqüências é possível formar com os elementos, exatamente da mesma forma já estudada.

02) Dividir o resultado encontrado pelo fatorial do número de escolhas de mesma hierarquia no problema. Esse será o número de seqüências distintas que cada conjunto gera.

Pode-se usar as notações $\mathbf{C}_{n,\,p}$ e $\binom{n}{p}$ para indicar o número de conjuntos com **p** elementos distintos a partir de **n** opções, formados sem restrição. Ainda, a notação $\mathbf{P}_n$ indica o número de seqüências geradas pela permutação de n elementos distintos, e $\mathbf{A}_{n,\,p}$ indica o número de seqüências com **p** elementos distintos a partir de **n** opções.

Compare algumas situações para se familiarizar com a idéia da hierarquia entre escolhas:

Número de pódios em uma corrida com 5 participantes	$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$	As posições têm hierarquias distintas.
Número de triângulos formados por 5 vértices em uma circunferência	$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10$	Ser o primeiro, o segundo ou o terceiro vértice é irrelevante.
Número de chapas para Presidente/Vice a partir de 4 opções	$4 \cdot 3 = 12$	Ser Presidente é hierarquicamente diferente de ser Vice.
Possíveis representantes de turma, escolhendo 2 alunos entre 4.	$\frac{4 \cdot 3}{2!} = 6$	Os dois representantes possuem o mesmo cargo.

EXERCÍCIOS DE AULA

01) A diretoria de uma empresa é constituída por 5 homens e 4 mulheres. Quantas comissões de 3 homens e 2 mulheres podem ser formadas?

02) (MACK) Num grupo de 10 pessoas temos somente 2 homens. O número de comissões de 5 pessoas que podemos formar com 1 homem e 4 mulheres é:

a) 70 b) 84 c) 140 d) 210 e) 252

03) Considere uma turma com 10 alunos.

a) De quantas maneiras é possível formar grupos de estudo de Matemática e Química, no mesmo horário, com 5 alunos em cada?

b) De quantas maneiras podem ser formados dois times de 5 na Educação Física?

04) Dos doze alunos de uma turma, quatro serão escolhidos para representar o colégio em um concurso. Quantos são os quartetos que obrigatoriamente contém o melhor estudante? E quantos não contém os com as notas mais baixas?

05) (UFRJ) Uma estante de biblioteca tem 12 livros: 7 exemplares do livro "Combinatória é fácil" e 5 exemplares de "Combinatória não é difícil". Considere que os livros com mesmo título sejam indistinguíveis. Determine de quantas maneiras diferentes podemos dispor os 12 livros na estante de modo que dois exemplares de "Combinatória não é difícil" nunca estejam juntos.

06) (UFRGS) Seja M o conjunto de todos os divisores positivos de 60. O número de subconjuntos de 3 elementos de M que se pode formar é:

a) 20 b) 36 c) 120 d) 220 e) 440

TAREFA - AULA 2

01) (MACK) Uma classe tem 10 meninos e 9 meninas. Quantas comissões diferentes existem com 4 meninos e 3 meninas, incluindo o melhor aluno dentre os meninos e a melhor aluna entre as meninas?

02) (FGV) O número de segmentos de reta que têm ambas as extremidades localizadas nos vértices de um cubo dado é:

a) 12 b) 15 c) 18 d) 24 e) 28

03) (MACK) A partir de um grupo de 12 professores, quer se formar uma comissão com um presidente, um relator e cinco outros membros. O número de formas de se compor a comissão é:

a) 12.772 b) 13.024 c) 25.940
d) 33.264 e) 27.764

04) (PUCCAMP) Você faz parte de um grupo de 12 pessoas, 5 das quais deverão ser selecionadas para formar um grupo de trabalho. De quantos modos você poderá fazer parte do grupo a ser formado?

a) 182 b) 330 c) 462 d) 782 e) 7920

05) (UNESP) Nove times de futebol vão ser divididos em 3 chaves, todas com o mesmo número de times, para a disputa da primeira fase de um torneio. Cada uma das chaves já tem um cabeça de chave definido. Nessas condições, o número de maneiras possíveis e diferentes de se completarem as chaves é:

a) 21 b) 30 c) 60 d) 90 e) 120

06) (UFRGS) O número máximo de triângulos que se pode obter quando se escolhem para seus vértices 10 pontos distintos sobre uma elipse é:

a) 40 b) 60 c) 120 d) 300 e) 720

07) (FATEC) Dispomos de 10 produtos para montagem de cestas básicas. O número de cestas que podemos formar com 6 desses produtos, de modo que um determinado produto seja sempre incluído, é:

a) 252 b) 210 c) 126 d) 120 e) 24

08) (UFSCAR) A câmara municipal de um determinado município tem exatamente 20 vereadores, sendo que 12 deles apóiam o prefeito e os outros são contra. O número de maneiras diferentes de se formar uma comissão contendo exatamente 4 vereadores situacionistas e 3 oposicionistas é:

a) 27720 b) 13860 c) 551 d) 495 e) 56

09) (FGV) Dentre 6 números positivos e 6 números negativos, de quantos modos podemos escolher 4 números cujo produto seja positivo?

a) 255 b) 960 c) 30 d) 625 e) 720

10) (UEL) São dados **n** pontos, dois a dois distintos entre si, quatro dos quais pertencem a uma reta r e os demais se encontram sobre uma reta paralela a r. Se podem ser construídos 126 quadriláteros com vértices nesses pontos, então **n** é um número:

a) menor que 10 b) primo c) múltiplo de 7
d) maior que 15 e) quadrado perfeito

11) (MACK) Numa Universidade, na confecção do horário escolar, seis turmas devem ser atribuídas a três professores, de modo que cada professor fique com duas turmas. O número de formas de se fazer a distribuição é:

a) 21 b) 15 c) 45 d) 60 e) 90

12) (UFRGS) Um professor organizou uma lista com 4 questões de Geometria e 6 de Álgebra, da qual indicou um conjunto diferente de 7 questões para cada um de seus alunos resolver. O número de alunos que recebeu todas as questões de Geometria para resolver é, no máximo, de:

a) 15 b) 20 c) 35 d) 42 e) 120

GABARITO

01	2352	**02**	E	**03**	D	**04**	B
05	D	**06**	C	**07**	C	**08**	A
09	A	**10**	B	**11**	E	**12**	B

AULA 3 - PERMUTAÇÕES COM REPETIÇÃO

A distinção que fizemos até agora entre *seqüências* e *conjuntos* funciona adequadamente para a maioria dos problemas. No entanto, existem situações em que podemos gerar resultados repetidos mesmo observando a distinção hierárquica entre as escolhas. Para ilustrar, considere os anagramas formados com as letras da palavra "BANANA".

À primeira vista, como são 6 letras, sendo que ser a primeira letra é hierarquicamente diferente de ser a segunda, temos um total de 6! = 720 anagramas. No entanto, basta analisar um desses anagramas para verificar que essa resposta não é correta.

BANANA

Por exemplo, o (único) anagrama que forma exatamente a palavra "BANANA": se a letra "B" estivesse em qualquer posição diferente da primeira, evidentemente o anagrama seria diferente; ainda, se a letra "A" cinza trocasse de lugar com a letra "N" branca, o anagrama também seria diferente. No entanto, o que ocorreria se trocássemos de lugar o "A" cinza com o "A" preto? Ou o "N" branco com o "N" cinza? Não ocorreriam mudanças no anagrama, visto que a *mesma letra* continuaria ocupando a *mesma posição*.

Ou seja, apesar de as escolhas serem hierarquicamente diferentes, existem trocas de ordem que *não* alteram o resultado final - o anagrama. A pergunta que deve ser respondida aqui é: quantos anagramas iguais são gerados a partir da definição de um anagrama fixo? Voltando ao exemplo e perguntando de outro modo: quantas vezes é possível formar o mesmo anagrama "BANANA" a partir da mudança de posição das letras que o formam?

Não é difícil responder, ainda mais se analisarmos o próprio exemplo em questão. Nele, exige-se que a letra "B" seja a primeira, que a letra "A" ocupe as posições 2, 4 e 6 e que a letra "N" ocupe as posições 3 e 5. A pergunta pode ser respondida via PFC:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \mathbf{B} & \underline{3} & \cdot & \underline{2} & \cdot & \underline{2} & \cdot & \underline{1} & \cdot & \underline{1} & = 3!\cdot 2! = 12 \\ & \mathrm{A} & & \mathrm{N} & & \neq A_1 & & \neq N_1 & & \neq A_1 & \\ & \mathrm{A} & & \mathrm{N} & & & & & & \neq A_2 & \\ & \mathrm{A} & & & & & & & & & \end{array}$$

Ou seja, o anagrama "BANANA" gera 12 anagramas iguais a ele somente pela troca de posição das letras repetidas. O mesmo raciocínio vale para *qualquer* anagrama formado com as letras de "BANANA".

Dessa forma, o total de anagramas *distintos* formados pelas letras de "BANANA" é:

$$\frac{6!}{\underbrace{\boxed{3!}}_{3\ A's}\cdot\underbrace{\boxed{2!}}_{2\ N's}}=\frac{720}{12}=60$$

Repare que o mesmo raciocínio pode ser generalizado facilmente. Se um elemento aparece repetido *n* vezes, existem *n!* modos de se permutar esse elemento sem alterar o resultado final, fixando sua posição no mesmo problema. Com isso, existirão n! seqüências repetidas *para cada elemento repetido*. Assim, se os elementos A_1, A_2, A_3, ..., A_n aparecem cada um deles repetidos a_1, a_2, a_3, ..., a_n vezes, então existem $a_1!\cdot a_2!\cdot a_3!\cdot\ldots\cdot a_n!$ seqüências repetidas, e o número total de seqüências deve ser *dividido* por esse novo resultado.

Essa lógica também ajuda a responder problemas de contagem de conjuntos. Por exemplo, quantos trios diferentes podemos formar a partir de 5 pessoas?

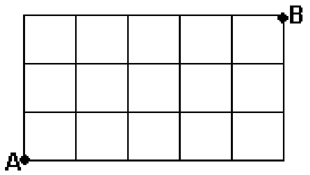
Aprendemos a resolver o problema analisando que, em um trio, todas as posições têm a mesma hierarquia. Assim, existem $\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3!}=10$ trios distintos.

No entanto, podemos interpretar esse problema como um anagrama com repetição. Se a letra "E" simbolizar "escolhida" e a letra "N", "não-escolhida", as seqüências EEENN, ENENE, NNEEE, por exemplo, ilustram diferentes modos de fazer as escolhas entre as cinco pessoas, onde a posição de cada letra indica cada uma dessas pessoas. Anagramas com repetição são fáceis de calcular. Com 5 letras, sendo 3 "E"s e 2 "N"s, o total de anagramas distintos é $\frac{5!}{3!\cdot 2!}=\frac{\mathbf{5\cdot 4\cdot 3}\cdot\cancel{2!}}{\mathbf{3!}\cdot\cancel{2!}}=10$.

EXERCÍCIOS DE AULA

01) Quando dez moedas distintas são lançadas simultaneamente, de quantos modos é possível obter um resultado com 6 caras e 4 coroas?

02) No desenho abaixo, as linhas horizontais e verticais representam ruas, e os quadrados representam quarteirões. Qual é a quantidade de trajetos de comprimento mínimo ligando A a B?



03) Quantos anagramas da palavra GARRAFA apresentam as letras A, A, A, R, R juntas?

04) (ITA) Considere uma prova com 10 questões de múltipla escolha, cada questão com 5 alternativas. Sabendo que cada questão admite uma única alternativa correta, então o número de formas possíveis de completar a folha óptica em que um candidato acerte somente 7 das 10 questões é:

a) 7680 b) 3840 c) 7500 d) 2240 e) 120

05) Quantas soluções inteiras não-negativas existem para a equação **x + y + z = 5**?

TAREFA - AULA 3

01) (CESGRANRIO) No código Morse, as letras são **.** e **-**, e as palavras contêm de uma a quatro letras. O número de palavras distintas que podem ser formadas neste código é de:

a) 16 b) 20 c) 24 d) 26 e) 30

02) (UFC) Assinale a alternativa na qual consta a quantidade de números inteiros formados por três algarismos distintos, escolhidos dentre 1, 3, 5, 7 e 9, e que são maiores que 200 e menores que 800.

a) 30 b) 36 c) 42 d) 48 e) 54

03) (UEL) Um número capicua é um número que se pode ler indistintamente em ambos os sentidos, da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda (exemplo: 5335). Quantos desses números têm 3 algarismos e são pares?

a) 20 b) 40 c) 80 d) 90 e) 100

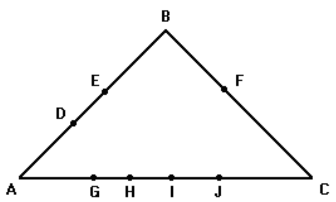
04) (UFPA) Usando os algarismos do conjunto {2, 6}, podemos formar quantos números de 4 algarismos?

a) 0 b) 2 c) 4 d) 12 e) 16

05) (PUCMG) Uma sala tem 6 lâmpadas com interruptores independentes. O número de modos de iluminar essa sala, acendendo pelo menos uma lâmpada, é:

a) 63 b) 79 c) 127 d) 182 e) 201

06) (UFMG) Na figura, o número de triângulos que se obtém com vértices nos pontos D, E, F, G, H, I J é:

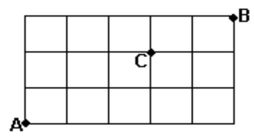


a) 20
b) 21
c) 25
d) 31
e) 35

07) (SELESSUL) O número de permutações distintas possíveis com as 8 letras da palavra PARALELA, começando todas com a letra P, será de:

a) 120 b) 720 c) 420 d) 24 e) 360

08) (UFRGS) No desenho, as linhas horizontais e verticais representam ruas, e os quadrados representam quarteirões. A quantidade de trajetos de comprimento mínimo ligando A a B passando por C é:



a) 12
b) 13
c) 15
d) 24
e) 30

09) (UFRGS) Se uma partida de futebol termina com o resultado de 5 gols para o time A e 3 gols para o B, existem diversas maneiras de o placar evoluir de 0 x 0 a 5 x 3. Por exemplo, uma evolução poderia ser:

A	B		A	B		A	B		A	B		A	B
0	0	→	1	0	→	1	1	→	1	2	→	2	2

	A	B		A	B		A	B		A	B
→	3	2	→	4	2	→	4	3	→	5	3

Quantas maneiras, no total, tem o placar de evoluir de 0 x 0 a 5 x 3?

a) 16 b) 24 c) 36 d) 48 e) 56

10) (UFMG) Um teste é composto por 15 afirmações. Para cada uma delas, deve-se assinalar uma das letras V ou F, caso a afirmação seja, respectivamente, verdadeira ou falsa. A fim de se obter, pelo menos, 80% de acertos, o número de maneiras diferentes de se marcar a folha de respostas é:

a) 455 b) 576 c) 560 d) 620 e) 640

11) (UNESP) O número de maneiras que 3 pessoas podem sentar-se em uma fileira de 6 cadeiras vazias de modo que entre duas pessoas próximas (seguidas), sempre tenha exatamente uma cadeira vazia é:

a) 3 b) 6 c) 9 d) 12 e) 15

GABARITO

01	E	**02**	B	**03**	B	**04**	E
05	A	**06**	D	**07**	C	**08**	E
09	E	**10**	B	**11**	D		

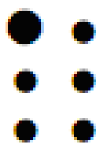
AULA 4 - EXERCÍCIOS

01) (ITA) O número de anagramas da palavra VESTIBULANDO que não apresentam as cinco vogais juntas é:

a)12! b)8!.5! c)12!-8!5! d)12!-8! e) 12! - 7!5!

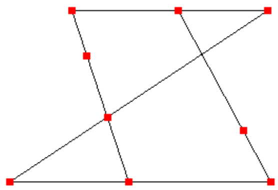
02) (ENEM) A escrita Braile para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caractere é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais. Abaixo, a representação da letra A. O número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braile é:

a) 12
b) 31
c) 36
d) 63
e) 720



03) De quantas maneiras cinco casais podem passear em uma roda gigante de cinco carrinhos duplos, mantendo juntos marido e mulher?

04) (PUCMG) No interior de um terreno retangular, foram fincadas nove estacas, conforme indicado na figura. Pretende-se demarcar nesse terreno lotes triangulares de modo que em cada vértice haja uma estaca. O número de lotes distintos que é possível demarcar é:



a) 42
b) 76
c) 84
d) 98
e) 100

05) (UFRGS) Um trem de passageiros é constituído de uma locomotiva e 6 vagões distintos, sendo um deles restaurante. Sabendo-se que a locomotiva deve ir à frente, e que o vagão restaurante não pode ser colocado imediatamente após a locomotiva, o número de modos diferentes de montar a composição é:

a) 120 b) 320 c) 500 d) 600 e) 720

06) (UFRGS) Para colocar preço em seus produtos, uma empresa desenvolveu um sistema simplificado de código de barras formado por cinco linhas separadas por quatro espaços. Podendo usar linhas de três larguras possíveis e espaços de duas larguras possíveis, o número total de preços que podem ser representados por esse código é:

a) 1440 b) 2880 c) 3125 d) 3888 e) 4320

07) (FUVEST) Três empresas devem ser contratadas para realizar quatro trabalhos distintos em um condomínio. Cada trabalho será atribuído a uma única empresa e todas elas devem ser contratadas. De quantas maneiras distintas podem ser distribuídos os trabalhos?

a) 12 b) 18 c) 36 d) 72 e) 108

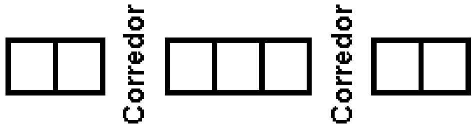
08) (UFRGS) O total de múltiplos de três com quatro algarismos distintos escolhidos entre 3, 4, 6, 8 e 9 é:

a) 24 b) 36 c) 48 d) 72 e) 96

09) (UFSM) De quantas maneiras distintas podem-se alinhar cinco estacas azuis idênticas, uma vermelha e uma branca?

a) 12 b) 30 c) 42 d) 240 e) 5040

10) (MACK) Num avião, uma fila tem 7 poltronas dispostas como na figura. Os modos de João e Maria ocupares duas poltronas dessa fila, de modo que não haja um corredor entre eles, são em número de:



a) 6 b) 7 c) 8 d) 10 e) 12

11) (UNIRIO) Um grupo de 9 pessoas, dentre elas os irmãos João e Pedro, foi acampar. Na hora de dormir montaram 3 barracas diferentes, sendo que, na primeira, dormiram duas pessoas; na segunda, três pessoas; e, na terceira, as quatro restantes. De quantos modos diferentes eles podem se organizar, sabendo que a única restrição é a de que os irmãos João e Pedro NÃO podem dormir na mesma barraca?

a) 1260 b) 1225 c) 1155 d) 1050 e) 910

AULA 5 - PROBABILIDADE

São duas as questões pertinentes na resolução de um problema envolvendo probabilidades. Primeiro, é preciso quantificar o conjunto de todos os resultados possíveis, que será chamado de **espaço amostral**. Segundo, é preciso quantificar o conjunto de todos os resultados desejados, que será chamado de **evento**.

Com tais dados obtidos, pode-se definir a probabilidade de um determinado evento E ocorrer como sendo a razão entre as quantidades de elementos dos conjuntos acima.

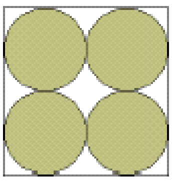
Assim,

$$P_E = \frac{\text{Número de Resultados Desejados}}{\text{Número de Resultados Possíveis}}$$

EXERCÍCIOS DE AULA

01) (UFRGS) A figura representa uma parede quadrada na qual estão pintados discos de raio r. Se uma bola é lançada totalmente ao acaso contra a parede, a probabilidade de ela tocar fora dos discos está entre:

A) 14% e 16%
b) 17% e 19%
c) 20% e 22%
d) 23% e 25%
e) 26% e 28%

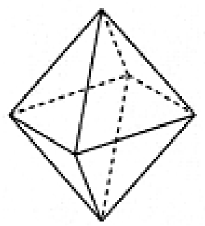


02) (UFRGS) Inteiramente ao acaso, 14 alunos dividiram-se em 3 grupos de estudos. O primeiro, para estudar Matemática, o segundo, Física, e o terceiro, Química. Se em cada um dos grupos há pelo menos 4 alunos, a probabilidade de haver exatamente 5 alunos no grupo que estuda Matemática é de:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{5}{6}$ e) 1

03) Apostando em 6 números, qual é a probabilidade de ser sorteado na Mega-Sena? E aumentando a aposta para 8 números, em quanto as chances são aumentadas?

04) (UFRGS) Escolhendo-se ao acaso dois vértices de um octaedro regular, a probabilidade de que esses vértices sejam extremos de uma das diagonais do octaedro é:



a) 0,2
b) 0,3
c) 0,4
d) 0,5
e) 0,6

05) (UFRGS) Uma caixa contém bolas azuis, brancas e amarelas, indistinguíveis a não ser pela cor. Na caixa existem 20 bolas brancas e 18 azuis. Retirando-se ao acaso uma bola da caixa, a probabilidade de ela ser amarela é $\frac{1}{3}$. O número de bolas amarelas é:

a) 18 b) 19 c) 20 d) 21 e) 22

TAREFA - AULA 5

01) (FAAP) Qual a probabilidade de se obter um número divisível por 5 na escolha das permutações dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5?

a) 5 b) $\frac{1}{5}$ c) 1 d) 4 e) $\frac{1}{4}$

02) Uma urna contém 2 bolas brancas, 3 verdes e 4 azuis. Retirando-se, ao acaso, uma bola na urna, qual a probabilidade de se obter uma bola branca ou verde?

03) Uma urna contém 11 bolas numeradas de 1 a 11. Retirando-se uma delas ao acaso, observa-se que seu número é ímpar. Determinar a probabilidade de que esse número seja menor que 5.

04) (UFRGS) Um número natural N de três algarismos, menor que 500, é escolhido ao acaso. A probabilidade de que $\log_2 N$ seja um número natural é:

a) 0,001 b) 0,005 c) 0,01 d) 0,05 e) 0,1

05) (UFRGS) Considere dois dados, cada um deles com seis faces, numeradas de 1 a 6. Se os dados são lançados ao acaso, a probabilidade de que a soma dos números sorteados seja 5 é:

a) $\frac{1}{15}$ b) $\frac{2}{21}$ c) $\frac{1}{12}$ d) $\frac{1}{11}$ e) $\frac{1}{9}$

06) (UFRGS) As máquinas A e B produzem o mesmo tipo de parafuso. A porcentagem de parafusos defeituosos produzidos, respectivamente, pelas máquinas A e B é de 15% e de 5%. Foram misturados 100 parafusos produzidos por A e 100 produzidos por B. Se tirarmos um parafuso ao acaso e ele for defeituoso, a probabilidade de que tenha sido produzido por A é de:

a) 10% b) 15% c) 30% d) 50% e) 75%

07) (FEI) Em uma pesquisa realizada em uma Faculdade foram feitas duas perguntas aos alunos. Cento e vinte responderam "sim" a ambas; 300 responderam "sim" à primeira; 250 responderam "sim" à segunda e 200 responderam "não" a ambas. Se um aluno for escolhido ao acaso, qual é a probabilidade de ele ter respondido "não" à primeira pergunta?

08) (ENEM) Em um concurso de televisão, apresentam-se ao participante 3 fichas voltadas para baixo, estando representada em cada uma delas as letras T, V e E. As fichas encontram-se alinhadas em uma ordem qualquer. O participante deve ordenar as fichas ao seu gosto, mantendo as letras voltadas para baixo, tentando obter a sigla TVE. Ao desvirá-las, para cada letra que esteja na posição correta ganhará um prêmio de R$ 200,00. A probabilidade de o participante não ganhar qualquer prêmio é igual a:

a) 0 b) 1/3 c) 1/4 d) 1/2 e) 1/6

09) (ENEM) A probabilidade de o concorrente ganhar exatamente o valor de R$400,00 é igual a:

a) 0 b) 1/3 c) 1/2 d) 2/3 e) 1/6

10) (ENEM) Num determinado bairro há duas empresas de ônibus, ANDABEM e BOMPASSEIO, que fazem o trajeto levando e trazendo passageiros do subúrbio ao centro da cidade. Um ônibus de cada uma dessas empresas parte do terminal a cada 30 minutos, nos horários indicados na tabela. Carlos mora próximo ao terminal de ônibus e trabalha na cidade. Como não tem hora certa para chegar ao trabalho e nem preferência por qualquer das empresas, toma sempre o primeiro ônibus que sai do terminal. Nessa situação, pode-se afirmar que a probabilidade de Carlos viajar num ônibus da empresa ANDABEM é:

Horário dos ônibus	
ANDABEM	BOMPASSEIO
...	...
6h00min	6h10min
6h30min	6h40min
7h00min	7h10min
7h30min	7h40min
...	...

a) um quarto da probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa BOMPASSEIO.
b) um terço da probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa BOMPASSEIO.
c) metade da probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa BOMPASSEIO.
d) duas vezes maior do que a probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa BOMPASSEIO.
e) três vezes maior do que a probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa BOMPASSEIO.

GABARITO

01	B	**02**	$\frac{5}{9}$	**03**	$\frac{1}{3}$	**04**	B	**05**	E	**06**	E
07	$\frac{11}{21}$	**08**	B	**09**	A	**10**	D				

AULA 6 - PROBABILIDADES

MULTIPLICAÇÃO DE PROBABILIDADES

Sendo **A** e **B** dois eventos independentes em um mesmo espaço amostral **E**, temos:

$$P_{A\ e\ B} = P_A \cdot P_B$$

Importante: O evento **A** ocorre **e** o evento **B** ocorre.

ADIÇÃO DE PROBABILIDADES

$$P_{A\ ou\ B} = P_A + P_B$$

Em problemas onde exista a intersecção entre os eventos A e B, cuidar para não contar duas vezes tais elementos.

Importante: O evento **A** ocorre **ou** o evento **B** ocorre.

EXERCÍCIOS DE AULA

01) Uma urna contém 4 bolas vermelhas, 3 bolas azuis e 3 bolas brancas. Qual a probabilidade de retirarmos uma bola vermelha e, em seguida, **com a reposição** dessa bola, uma branca?

02) Uma urna contém 4 bolas vermelhas, 3 bolas azuis e 3 bolas brancas. Qual a probabilidade de retirarmos duas bolas, **sem reposição**, e obter uma bola vermelha e outra branca?

IMPORTANTE: Na análise de um caso específico, **NÃO ESQUECER** de multiplicar pelo número de casos distintos.

03) Na sala de espera de um consultório, estão 3 homens e 4 mulheres. Qual a probabilidade de 4 pessoas serem chamadas aleatoriamente e entrarem 2 homens e 2 mulheres?

04) Qual a probabilidade de responder aleatoriamente as 25 questões da prova de matemática da UFRGS e acertar exatamente 9 questões?

05) No lançamento de 4 moedas, qual a probabilidade de obter pelo menos uma coroa?

Se **P** é a probabilidade de determinado evento ocorrer, então **100% - P** $\Rightarrow$ **1 - P** é a probabilidade de ele **não** ocorrer.

06) (ENEM) Um aluno de uma escola será escolhido por sorteio para representá-la em uma certa atividade. A escola tem dois turnos. No diurno há 300 alunos, distribuídos em 10 turmas de 30 alunos. No noturno há 240 alunos, distribuídos em 6 turmas de 40 alunos. Em vez do sorteio direto envolvendo os 540 alunos, foram propostos dois outros métodos de sorteio:

Método I: escolher ao acaso um dos turnos (por exemplo, lançando uma moeda) e, a seguir, sortear um dos alunos do turno escolhido.

Método II: escolher ao acaso uma das 16 turmas (por exemplo, colocando um papel com o número de cada turma em uma urna e sorteando uma delas) e, a seguir, sortear um dos alunos dessa turma.

Sobre os métodos I e II de sorteio é correto afirmar:

a) em ambos os métodos, todos os alunos têm a mesma chance de serem sorteados.

b) no método I, todos os alunos têm a mesma chance de serem sorteados, mas, no método II a chance de um aluno do diurno ser sorteado é maior que a de um aluno do noturno.

c) no método II, todos os alunos têm a mesma chance de serem sorteados, mas, no método I, a chance de um aluno do diurno ser sorteado é maior que a de um aluno do noturno.

d) no método I, a chance de um aluno do noturno ser sorteado é maior do que a de um aluno do diurno, enquanto no método II ocorre o contrário.

e) em ambos os métodos, a chance de um aluno do diurno ser sorteado é maior do que a de um aluno do noturno.

07) (PUCRS) Um número é escolhido aleatoriamente dentre os inteiros de 1 a 50. A probabilidade de que ele seja divisível por 2 ou por 5 é:

a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{7}{5}$ d) $\frac{1}{10}$ e) $\frac{7}{10}$

08) (UFRGS) Um painel é formado por dois conjuntos de sete lâmpadas cada um, dispostos como na figura 1 abaixo. Cada conjunto de lâmpadas pode ser aceso independentemente do outro, bem como as lâmpadas de um mesmo conjunto podem ser acesas independentemente umas das outras, formando ou não números. Estando todas as lâmpadas apagadas, acendem-se, ao acaso e simultaneamente, cinco lâmpadas no primeiro conjunto e quatro lâmpadas no segundo conjunto. A probabilidade de que apareça no painel o número 24, como na figura II, é:

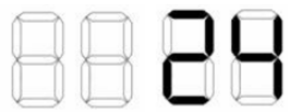


Figura 1 Figura 2

a) $\frac{1}{735}$ b) $\frac{1}{700}$ c) $\frac{1}{500}$

d) $\frac{1}{250}$ e) $\frac{1}{200}$

TAREFA - AULA 6

01) No lançamento de duas moedas, qual é a probabilidade de se obter cara em ambas?

02) No lançamento de três moedas, qual é a probabilidade de se obter **pelo menos** uma cara?

03) No lançamento de 3 dados, qual é a probabilidade de não se obterem, nas faces voltadas para cima, 3 números iguais?

04) Uma urna contém 20 bolas numeradas de 1 a 20. Ao retirarmos uma bola ao acaso, qual a probabilidade de ela ter um número múltiplo de 2 ou múltiplo de 5?

a) $\frac{13}{20}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{7}{10}$ d) $\frac{3}{5}$ e) $\frac{11}{20}$

05) Uma urna contém 30 etiquetas numeradas de 1 a 30. Retirando-se uma etiqueta, qual a probabilidade de se obter um número menor que 20 ou número ímpar?

06) Numa conferência estão reunidos: 5 mulheres e 7 homens, matemáticos; 4 mulheres e 8 homens, físicos; 6 mulheres e 4 homens, químicos. Uma pessoa é escolhida, ao acaso, para presidir a conferência. Qual a probabilidade de que essa pessoa seja mulher ou matemático(a)?

07) No lançamento de 2 dados, qual é a probabilidade de se obterem, nas faces voltadas para cima, 2 números tais que seu produto seja ímpar.

08) Uma urna contém 3 bolas brancas e 4 bolas pretas. Retirando-se, sucessivamente e sem reposição, 3 bolas, qual é a probabilidade de saírem as duas primeiras bolas pretas e a terceira bola branca?

09) Uma pessoa joga um dado 3 vezes. Calcular a probabilidade de ela obter o número 2 somente na terceira jogada.

10) (UFRGS) Em uma gaveta, cinco pares diferentes de meias estão misturados. Retirando-se ao acaso duas meias, a probabilidade de que sejam do mesmo par é de:

a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{1}{2}$

11) (UFRGS) Uma parteira prevê, com 50% de chance de acerto, o sexo de cada criança que vai nascer. Num conjunto de três crianças, a probabilidade de ela acertar pelo menos duas previsões é de:

a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{2}{3}$

12) (ENEM) Uma empresa de alimentos imprimiu em suas embalagens um cartão de apostas do seguinte tipo:

Cada cartão de apostas possui 7 figuras de bolas de futebol e 8 sinais de "X" distribuídos entre os 15 espaços possíveis, de tal forma que a probabilidade de um cliente ganhar o prêmio nunca seja igual a zero. Em determinado cartão existem duas bolas na linha 4 e duas bolas na linha 5. Com esse cartão, a probabilidade de o cliente ganhar o prêmio é:

a) $\frac{1}{27}$ b) $\frac{1}{36}$ c) $\frac{1}{54}$ d) $\frac{1}{72}$ e) $\frac{1}{108}$

GABARITO

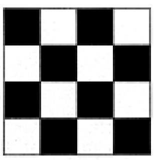
01	$\frac{1}{4}$	**02**	$\frac{7}{8}$	**03**	$\frac{35}{36}$	**04**	D
05	$\frac{4}{5}$	**06**	$\frac{11}{17}$	**07**	$\frac{1}{4}$	**08**	$\frac{6}{35}$
09	$\frac{25}{216}$	**10**	B	**11**	D	**12**	C

AULA 7 - EXERCÍCIOS

01) (UFRGS) Dentre um grupo formado por dois homens e quatro mulheres, três pessoas são escolhidas ao acaso. A probabilidade de que sejam escolhidos um homem e duas mulheres é de

a) 25% b) 30% c) 33% d) 50% e) 60%

02) (UFRGS) Considere o tabuleiro de 16 casas, com 8 casas brancas e 8 casas pretas, representado na figura abaixo. Três peças serão dispostas ao acaso sobre o tabuleiro, cada um delas dentro de uma casa, ocupando, assim, três casas distintas. A probabilidade de que as três peças venham a ocupar três casas de mesma cor é:



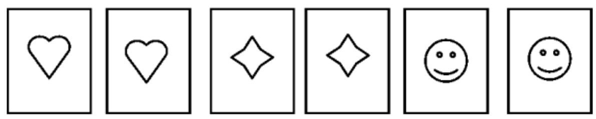
a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{1}{2}$

03) (FGV) Um dado é lançado 3 vezes. A probabilidade de que a face 4 apareça ao menos uma vez é:

a) $\frac{81}{216}$ b) $\frac{91}{216}$ c) $\frac{101}{216}$ d) $\frac{111}{216}$ e) $\frac{121}{216}$

04) (UFG) Um jogo de memória é formado por seis cartas, conforme as figuras que seguem. Após embaralhar as cartas e virar as suas faces para baixo, o jogador deve buscar as cartas iguais, virando exatamente duas. A probabilidade de ele retirar, ao acaso, duas cartas iguais na primeira tentativa é de:



a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{1}{6}$

05) (UFRGS) Na biblioteca de uma universidade, há uma sala que contém apenas livros de Matemática e livros de Física. O número de livros de Matemática é o dobro do número de livros de Física. São dirigidos ao Ensino Médio 4% dos livros de Matemática e 4% dos livros de Física. Escolhendo-se ao acaso um dos livros dirigidos ao Ensino Médio, a probabilidade de que ele seja de Matemática é:

a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{5}{8}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{5}{6}$

06) (UFRGS) Sendo A um ponto fixo de um círculo de raio r e escolhendo-se ao acaso um ponto B sobre o círculo, a probabilidade da corda AB ter comprimento maior que r está entre:

a) 25% e 30% b) 35% e 40% c) 45% e 50%
d) 55% e 60% e) 65% e 70%

07) O adesivo abaixo pode ser encontrado em alguns banheiros e diz que 1 a cada 5 pessoas não lava as mãos ao sair do banheiro. Se 5 pessoas saem do banheiro, qual a probabilidade de que exatamente uma delas não tenha lavado as mãos?

08) As probabilidades de duas pessoas A e B acertem um alvo são $\frac{2}{5}$ e $\frac{1}{3}$, respectivamente. Cada pessoa atira contra o alvo uma única vez. Qual é a probabilidade de que o alvo seja atingido por:

a) apenas uma pessoa?
b) pelos menos uma delas?

TAREFA - AULA 7

01) (UFRGS) Uma pessoa tem em sua carteira oito notas de R$1, cinco notas de R$2 e uma nota de R$5. Se ela retirar ao acaso três notas da carteira, a probabilidade de que as três notas retiradas sejam de R$1 está entre:

a) 15% e 16% b) 16% e 17% c) 17% e 18%
d) 18% e 19% e) 19% e 20%

02) (UFRGS) Numa maternidade, aguarda-se o nascimento de três bebês. A probabilidade de que os três bebês sejam do mesmo sexo é:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{1}{8}$

03) (ENEM) Um apostador tem três opções para participar de certa modalidade de jogo, que consiste no sorteio aleatório de um número dentre dez.

1ª opção: comprar três números para um único sorteio.
2ª opção: comprar dois números para um sorteio e um número para um segundo sorteio.
3ª opção: comprar um número para cada sorteio, num total de três sorteios.

Se X, Y, Z representam as probabilidades de o apostador ganhar algum prêmio escolhendo, respectivamente, a 1ª, a 2ª ou a 3ª opções, é correto afirmar que:

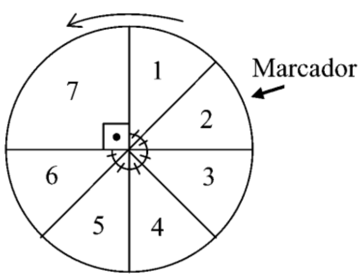
a) X < Y < Z b) X = Y = Z c) X > Y = Z
d) X = Y > Z e) X > Y > Z

04) (UFLA) Em um programa de auditório, utiliza-se uma roleta, como na figura. A roleta é girada duas vezes. A probabilidade de se obter dois números cuja soma seja menor que 14 é dada por:

a) $\frac{1}{14}$ d) $\frac{1}{49}$

b) $\frac{48}{49}$ e) $\frac{1}{16}$

c) $\frac{15}{16}$



05) (UFRGS) Em um jogo, dentre dez fichas numeradas com números distintos de 1 a 10, duas fichas são distribuídas ao jogador, que ganhará um prêmio se tiver recebido fichas com dois números consecutivos. A probabilidade de ganhar o prêmio neste jogo é de:

a) 14% b) 16% c) 20% d) 25% e) 33%

06) (UFMG) Leandro e Heloísa participam de um jogo em que se utilizam dois cubos. Algumas faces desses cubos são brancas e as demais, pretas. O jogo consiste em lançar, simultaneamente, os dois cubos e em observar as faces superiores de cada um deles quando param. Se as faces superiores forem da mesma cor, Leandro vencerá; se as faces superiores forem de cores diferentes, Heloísa vencerá.
Sabe-se que um dos cubos possui cinco faces brancas e uma preta e que a probabilidade de Leandro vencer o jogo é de $\frac{11}{18}$. Então, é CORRETO afirmar que o outro cubo tem ______ faces brancas.

a) 4 b) 1 c) 2 d) 3

07) (UFRGS) Dois dados perfeitos numerados de 1 a 6 são jogados simultaneamente. Multiplicam-se os números sorteados. A probabilidade de que o produto seja par é:

a) 25% b) 33% c) 50% d) 66% e) 75%

08 (UFRGS) Em três lançamentos consecutivos de um dado perfeito, a probabilidade de que a face 6 apareça voltada para cima em pelo menos um dos lançamentos é:

a) $1-\left(\frac{5}{6}\right)^3$ b) $1-\left(\frac{1}{6}\right)^3$ c) $\frac{3}{6}$

d) $\frac{1}{6^3}$ e) $\left(\frac{5}{6}\right)^3$

GABARITO

01	A	**02**	C	**03**	E	**04**	C
05	C	**06**	A	**07**	E	**08**	A