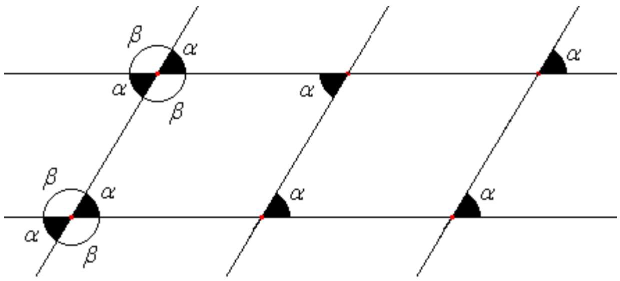
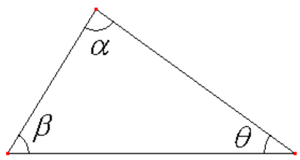
GEOMETRIA PLANA

CONCEITOS BÁSICOS

Retas paralelas cortadas por uma transversal

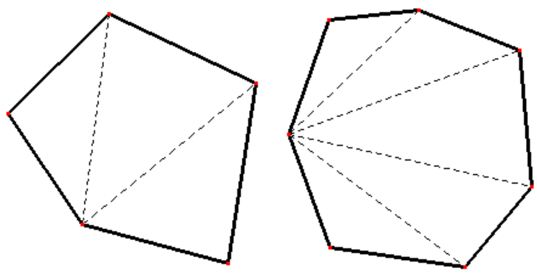


Soma dos ângulos internos de um triângulo



$$\alpha + \beta + \theta = 180^\circ$$

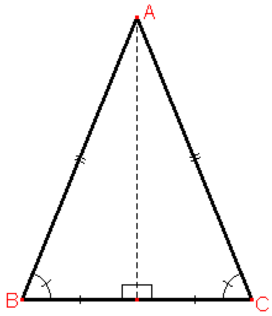
Soma dos ângulos internos de um polígono convexo



Um pentágono convexo pode ser dividido em três triângulos cujos ângulos internos são os mesmos do pentágono. Logo, a soma dos ângulos internos do pentágono vale 3 · 180º = 540º. De mesmo modo, um heptágono convexo pode ser dividido em cinco triângulos, e a soma dos seus ângulos internos valerá 5 · 180º = 900º. **Entender essa lógica é mais importante do que memorizar a fórmula em si.**

Generalizando, um polígono convexo de **n** lados pode ser divido em **n - 2** triângulos, já que os triângulos são formados a partir de diagonais do polígono. Dessa forma, os dois vértices adjacentes ao vértice de partida são "ignorados". Logo, a soma dos ângulos internos é dada por $S_n = (n-2)\cdot 180^\circ$.

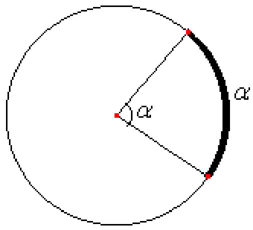
Triângulos isósceles



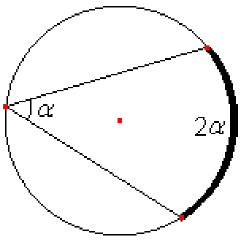
São aqueles que possuem **dois lados iguais**. Ligando o vértice A ao ponto médio da base BC, geramos dois triângulos congruentes. Logo, **os ângulos B e C são congruentes**.

$$AB \equiv AC \Leftrightarrow \hat{B} \equiv \hat{C}$$

Ângulos Centrais e Inscritos



Ângulos centrais são aqueles cujo vértice é o centro da circunferência. O arco gerado por eles tem a mesma medida em graus que o ângulo central.

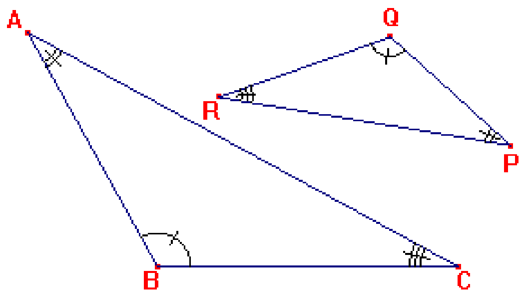


Ângulos inscritos são aqueles cujo vértice está sobre a circunferência. O arco gerado por eles tem o dobro da medida em graus do ângulo inscrito.

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Dois triângulos são ditos semelhantes se:

- seus ângulos são congruentes.
- seus lados correspondentes são proporcionais.



$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR} = k$$

IMPORTANTE: Os lados opostos a ângulos congruentes são correspondentes.

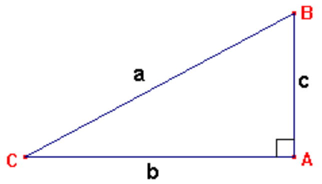
Em dois triângulos semelhantes, a razão de dois elementos lineares correspondentes quaisquer é igual à razão de semelhança.

PRINCIPAL CASO DE SEMELHANÇA

Se dois triângulos têm dois ângulos congruentes, então esses triângulos são semelhantes.

Ou seja, basta obtermos a congruência entre dois ângulos dos dois triângulos para que os lados correspondentes sejam proporcionais.

TRIÂNGULO RETÂNGULO



$$a^2 = b^2 + c^2$$

Ainda no triângulo retângulo, podemos definir as **razões trigonométricas**:

1) **Seno de um ângulo agudo α** é a razão da medida do cateto oposto ao ângulo α para a medida da hipotenusa.

2) **Cosseno de um ângulo agudo α** é a razão da medida do cateto adjacente ao ângulo α para a medida da hipotenusa.

3) **Tangente de um ângulo agudo α** é a razão da medida do cateto oposto para a medida do cateto adjacente ao ângulo α.

PARA LEMBRAR!

$$\underbrace{S\ O\ H}_{\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{OPOSTO}}{\text{HIPOTENUSA}}} \quad \underbrace{C\ A\ H}_{\cos\alpha = \frac{\text{ADJACENTE}}{\text{HIPOTENUSA}}} \quad \underbrace{T\ O\ A}_{\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{OPOSTO}}{\text{ADJACENTE}}}$$

	30º	**45º**	**60º**
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

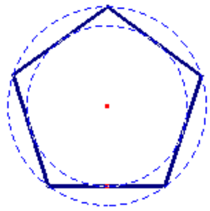
Essa tabela deve ser memorizada.

POLÍGONOS REGULARES

Um polígono convexo é **regular** se, e somente se, tem todos os lados congruentes e todos os ângulos congruentes.

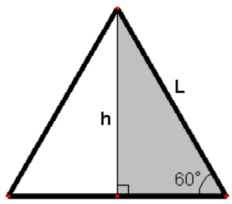
CENTRO de um polígono regular é o centro das circunferências inscrita e circunscrita a esse polígono.

APÓTEMA de um polígono regular é o segmento que une o centro do polígono ao ponto médio de um de seus lados. É o raio da circunferência inscrita.



As medidas relevantes de um polígono regular são todas calculadas a partir do Teorema de Pitágoras e das razões trigonométricas. Abaixo, alguns exemplos. As fórmulas obtidas não precisam ser memorizadas.

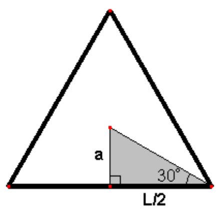
Triângulo Eqüilátero



Altura do triângulo eqüilátero:

$$sen 60^\circ = \frac{h}{L}$$

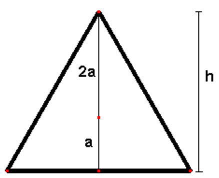
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{L} \Rightarrow h = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$



Apótema do triângulo:

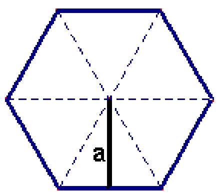
$$tg 30^\circ = \frac{a}{L/2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{L/2} \Rightarrow a = \frac{L\sqrt{3}}{6}$$



É importante destacar que em um triângulo eqüilátero o **apótema** corresponde a **um terço da altura**.

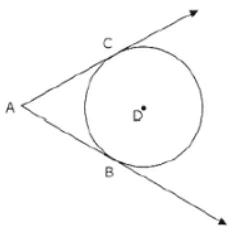
Hexágono Regular



Todo hexágono regular pode ser dividido em seis triângulos eqüiláteros. Seu apótema corresponde à altura de um dos triângulos eqüiláteros que o formam.

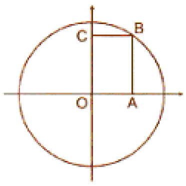
EXERCÍCIOS

01) (UFRGS) As semi-retas AB e AC tangenciam o círculo de centro D, respectivamente, nos pontos B e C. Se o ângulo BAC mede 70º, o ângulo BDC mede



a) 110º
b) 115º
c) 125º
d) 135º
e) 140º

02) (UFRGS) Na figura, o vértice A do retângulo OABC está a 6 cm do vértice C. O raio do círculo mede

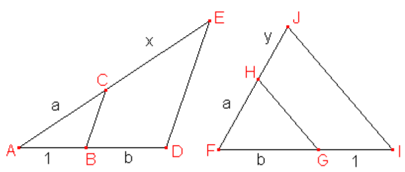


a) 5 cm
b) 6 cm
c) 8 cm
d) 9 cm
e) 10 cm

03) (UFRGS) A opção que apresenta todas as possibilidades do número de pontos de interseção de um círculo com um retângulo é

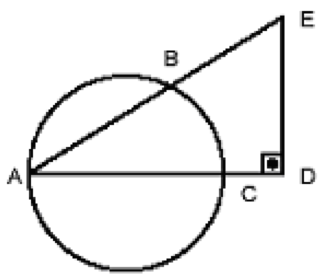
a) 0, 1, 2, 4 ou 8
b) 0, 2, 4, 6 ou 8
c) 0, 1, 3, 5 ou 7
d) 0, 2, 3, 5 ou 7
e) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ou 8

04) (UFRGS) Na fig. 1, BC é paralelo a DE e, na fig. 2, GH é paralelo a IJ. Então, x e y valem, respectivamente,



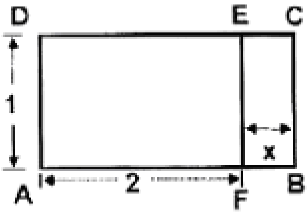
a) ab e a/b
b) ab e b/a
c) a/b e ab
d) b/a e ab
e) a/b e 1/b

05) (UFRGS) Sabendo que AD = 12 cm, AE = 15 cm e AB = 8 cm, a medida do raio do círculo é



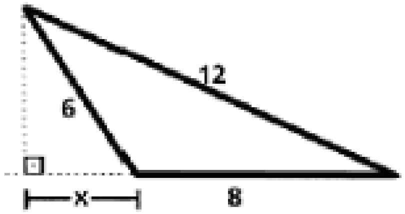
a) 4 cm
b) 4,5 cm
c) 5 cm
d) 5,5 cm
e) 6 cm

06) (UFRGS) Se os retângulos ABCD e BCEF são semelhantes, e AD = 1, AF = 2 e FB = x, então x vale



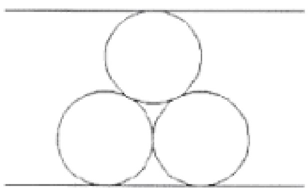
a) $-1+\sqrt{2}$
b) 1
c) $\sqrt{2}$
d) $1+\sqrt{2}$
e) 2

07) (UFRGS) Dada a figura, qual o valor de x?



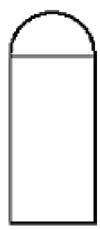
a) 2,15
b) 2,35
c) 2,75
d) 3,15
e) 3,35

08) (UFRGS) Na figura, os três círculos têm o mesmo raio **r**, as retas são paralelas, os círculos são tangentes entre si e cada um deles é tangente a uma das duas retas. Dentre as alternativas abaixo, a melhor aproximação para a distância entre as retas é



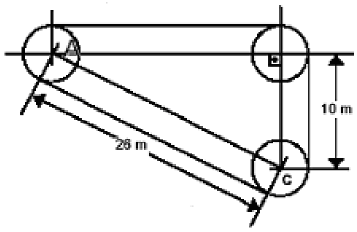
a) 3r
b) 3,25r
c) 3,5r
d) 3,75r
e) 4r

09) (PUCRS) A figura mostra uma janela em que a parte superior é formada por um semicírculo, e a parte inferior, por um retângulo cuja altura **h** possui o dobro da medida da base **b**. A medida da altura total da janela é



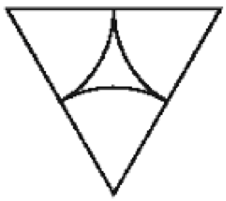
a) $\frac{3b}{2}$
b) $\frac{5b}{2}$
c) $\frac{b}{2}$
d) 2b
e) b

10) (UFRGS) Uma correia esticada passa em torno de três discos de 5 m de diâmetro, conforme a figura. Os pontos A, B e C representam os centros dos discos. A distância AC mede 26 m, e a distância BC mede 10 m. O comprimento da correia é



a) 60 m
b) $(60+5\pi)$ m
c) 65 m
d) $(60+10\pi)$ m
e) 65π m

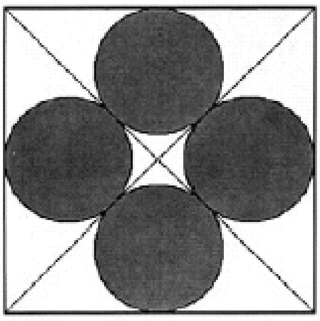
11) (UFRGS) Três arcos de círculo são construídos de maneira que seus centros estão nos vértices de um triângulo eqüilátero de lado 10 cm e interseccionam o triângulos nos pontos médios dos lados, como indicado na figura A soma dos comprimentos dos arcos é



a) π cm
b) 5 cm
c) $\frac{10}{3}\pi$ cm
d) 5π cm
e) 10π cm

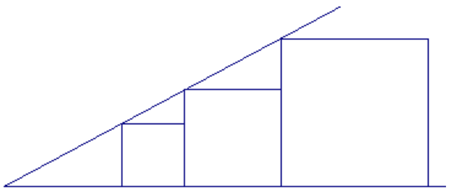
12) (UFRGS) Na figura, cada um dos quatro círculos tem raio igual a $\sqrt{2}-1$ e é tangente às diagonais do quadrado e a um de seus lados. A área do quadrado é:

a) $\sqrt{2}+1$
b) $2\sqrt{2}$
c) 4
d) $3\sqrt{2}-1$
e) 6

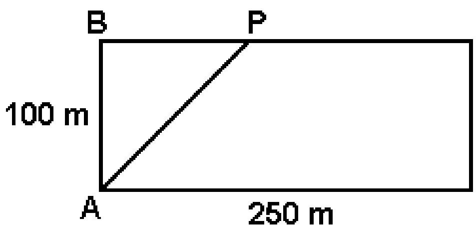


13) Sabendo que, na figura seguinte, temos três quadrados de lados **x**, **6** e **9**, calcule o valor de **x**.

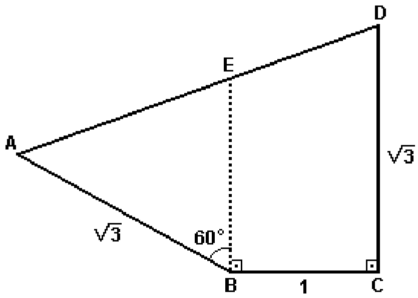
a) 3
b) 3,5
c) 4
d) 4,5
e) 5



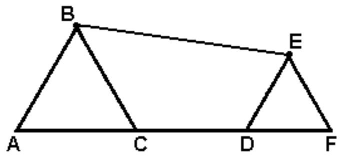
14) (UFG) Uma pista retangular para caminhada mede 100 por 250 metros. Deseja-se marcar um ponto P, conforme figura a seguir, de modo que o comprimento do percurso ABPA seja a metade do comprimento total da pista. Calcule a distância entre os pontos B e P.



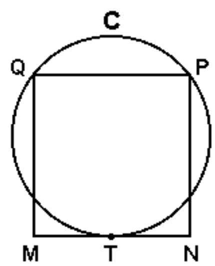
15) (FUVEST) No quadrilátero ABCD da figura a seguir, E é um ponto sobre o lado AD tal que o ângulo ABE mede 60º e os ângulos EBC e BCD são retos. Sabe-se ainda que $AB = CD = \sqrt{3}$ e BC=1. Determine a medida de AD.



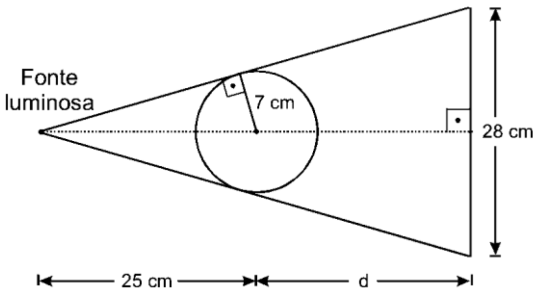
16) (UFF) Na figura, os triângulos ABC e DEF são equiláteros. Se AB, CD e DE medem, respectivamente, 6m, 4m e 4m, calcule a medida de BE.



17) (UFF) Seja MNPQ um quadrado de lado igual a 2 cm. Considere C o círculo que contém os vértices P e Q do quadrado e o ponto médio do lado MN (ponto T). Determine o raio do círculo C.

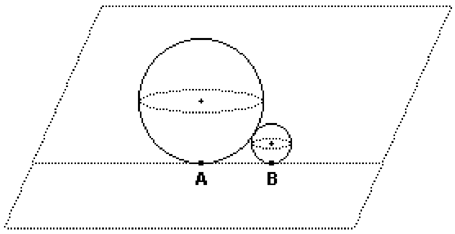


18) (UFG) Uma fonte luminosa a 25 cm do centro de uma esfera projeta sobre uma parede uma sombra circular de 28 cm de diâmetro, conforme figura. Se o raio da esfera mede 7 cm, a distância (d) do centro da esfera até a parede, em cm, é:



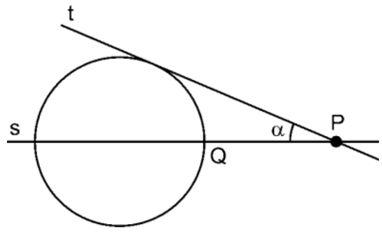
a) 23
b) 25
c) 28
d) 32
e) 35

19) (FUVEST) No jogo de bocha, disputado num terreno plano, o objetivo é conseguir lançar uma bola de raio 8 o mais próximo possível de uma bola menor, de raio 4. Num lançamento, um jogador conseguiu fazer com que as duas bolas ficassem encostadas, conforme ilustra a figura abaixo. A distância entre os pontos A e B, em que as bolas tocam o chão, é:



a) 8
b) $6\sqrt{2}$
c) $8\sqrt{2}$
d) $4\sqrt{3}$
e) $6\sqrt{3}$

20) (FUVEST) Na figura abaixo, a reta s passa pelo ponto P e pelo centro da circunferência de raio R, interceptando-a no ponto Q, entre P e o centro. Além disso, a reta t passa por P, é tangente à circunferência e forma um ângulo α com a reta s. Se PQ = 2R, então $\cos\alpha$ vale:



a) $\frac{\sqrt{2}}{6}$
b) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
d) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
e) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$

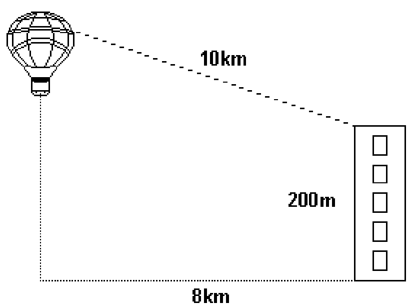
21) (PUCRJ) A maior distância entre dois pontos de um retângulo de base 8 cm e altura 6 cm é, em cm:

a) 14 b) 10 c) 7 d) 11 e) 12

22) (UEL) Se um círculo de 5 cm de raio está inscrito em um hexágono regular, o perímetro do hexágono, em centímetros, é igual a:

a) $20\sqrt{3}$ b) $18\sqrt{3}$ c) $15\sqrt{2}$ d) $12\sqrt{3}$ e) $9\sqrt{2}$

23) (UFLAVRAS) Qual deve ser a altitude do balão para que sua distância ao topo do prédio seja de 10km?

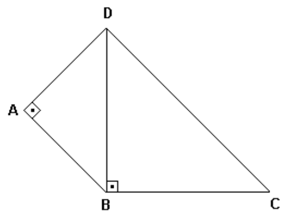


a) 6 km
b) 6.200 m
c) 11.200 m
d) 4 km
e) 5 km

24) (UFLAVRAS) Os lados de um triângulo medem 1m, 2m e 3m. A medida em metros que adicionada aos três lados transforma o triângulo em um triângulo retângulo é

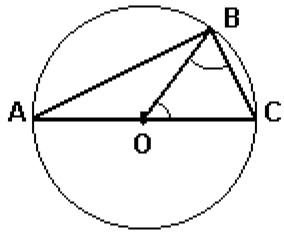
a) 1 m b) 2 m c) 3 m d) 4 m e) 5 m

25) (UFPE) Na figura, ABD e BCD são triângulos retângulos isósceles. Se AD = 4, quanto mede DC?



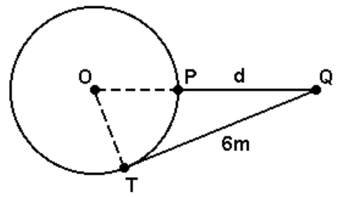
a) $4\sqrt{2}$
b) 6
c) 7
d) 8
e) $8\sqrt{2}$

26) (UFRRJ) Um arquiteto vai construir um obelisco de base circular. Serão elevadas sobre essa base duas hastes triangulares, conforme figura a seguir, onde o ponto 0 é o centro do círculo de raio 2m e os ângulos BOC e OBC são iguais. O comprimento do segmento AB é:



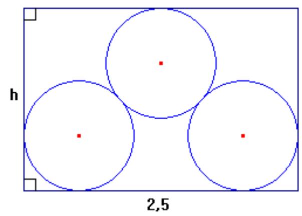
a) 2 m
b) 3 m
c) $3\sqrt{2}$ m
d) $2\sqrt{5}$ m
e) $2\sqrt{3}$ m

27) (UNESP) Em uma residência, há uma área de lazer com uma piscina redonda de 5 m de diâmetro. Nessa área há um coqueiro, representado na figura por um ponto Q. Se a distância de Q (coqueiro) ao ponto de tangência T (da piscina) é 6 m, a distância d = QP, do coqueiro à piscina, é, em metros:



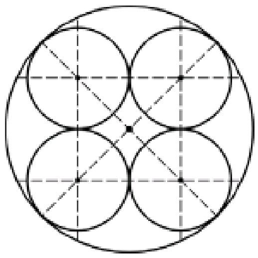
a) 4
b) 4,5
c) 5
d) 5,5
e) 6

28) (FUVEST) Um lenhador empilhou 3 troncos de madeira num caminhão de largura 2,5 m, conforme a figura abaixo. Cada tronco é um cilindro reto, cujo raio da base mede 0,5 m. Logo, a altura **h**, em metros, é



a) $\frac{1+\sqrt{7}}{2}$
b) $\frac{1+\sqrt{7}}{3}$
c) $\frac{1+\sqrt{7}}{4}$
d) $1+\frac{\sqrt{7}}{3}$
e) $1+\frac{\sqrt{7}}{4}$

29) (FFFCMPA) A companhia telefônica coloca cabos cilíndricos em dutos cilíndricos. A figura indica a relação entre as seções transversais de 4 cabos e do menor duto que pode contê-los. Supondo que o diâmetro de cada cabo seja 1 cm, o valor mais próximo para o diâmetro do duto mínimo é de:



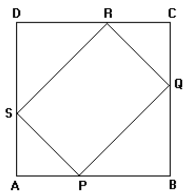
a) 2 cm
b) 2,5 cm
c) 3 cm
d) 3,5 cm
e) 4 cm

30) (UFRGS) Um hexágono regular tem lado de comprimento 1. A soma dos quadrados de todas as suas diagonais é:

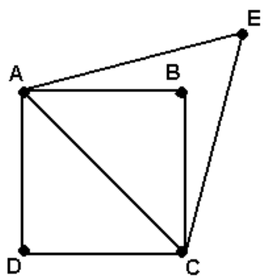
a) 6 b) 12 c) 18 d) 24 e) 30

31) (UFMG) Observe a figura. ABCD representa um quadrado de lado 11 e AP = AS = CR = CQ. O perímetro do quadrilátero PQRS é:

a) $11\sqrt{3}$
b) $22\sqrt{3}$
c) $11\sqrt{2}$
d) $22\sqrt{2}$



32) (UFRJ) Na figura, o triângulo AEC é equilátero e ABCD é um quadrado de lado 2cm. Calcule a distância BE.



33) Calcular, de um quadrado inscrito numa circunferência de raio $6\sqrt{2}$, a medida de um apótema.

34) Uma diagonal de um quadrado inscrito numa circunferência mede 8. Calcular, de um hexágono regular inscrito nessa circunferência, a medida de um lado.

35) Um apótema de um hexágono regular inscrito numa circunferência mede $5\sqrt{3}$. Calcular, de um triângulo eqüilátero inscrito nessa circunferência, a medida de um apótema.

36) Determine a razão entre o perímetro do quadrado inscrito em uma circunferência de raio R e o perímetro do quadrado circunscrito a essa mesma circunferência.

37) (UFRGS) O perímetro do triângulo eqüilátero circunscrito a um círculo de raio 3 é:

a) $18\sqrt{3}$ b) $20\sqrt{3}$ c) 36 d) $15\sqrt{6}$ e) 38

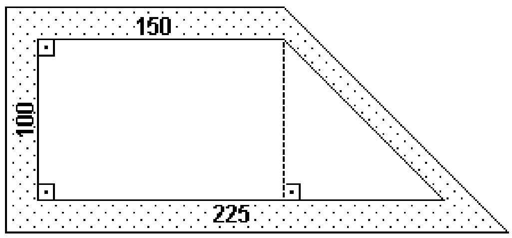
38) (UFRGS) A medida do lado de um pentágono regular inscrito em um círculo de raio igual a 1 é:

a) $2\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{5}$ b) $2\cos\dfrac{\pi}{5}$ c) $\sqrt{2}\cos\dfrac{2\pi}{5}$

d) $\sqrt{2}\,\text{sen}\,\dfrac{2\pi}{5}$ e) $\cos\dfrac{2\pi}{5}$

39) (PUCMG) A pista representada na figura tem a forma de um trapézio retângulo e as dimensões indicadas em metros. Um atleta que queira percorrer 6 km deverá dar m voltas completas nessa pista. O valor de m é:

a) 9
b) 10
c) 11
d) 12



40) (UEL) Se um círculo de 5 cm de raio está inscrito em um hexágono regular, o perímetro do hexágono, em centímetros, é igual a:

a) $20\sqrt{3}$ b) $18\sqrt{3}$ c) $15\sqrt{2}$ d) $12\sqrt{3}$ e) $9\sqrt{2}$

41) (UFPE) Júnior descobriu um mapa de tesouro com as seguintes instruções: partindo de onde o mapa foi encontrado caminhe 16 passos na direção oeste, a seguir 9 passos na direção sul, depois 11 passos na direção oeste, prossiga com 24 passos na direção norte, a seguir 15 passos na direção leste e finalmente 10 passos na direção sul que é onde se encontra o tesouro. Supondo que a região é plana, qual a menor distância (em passos) entre o lugar onde se encontra o mapa e o lugar onde se encontra o tesouro?

a) 30 b) 13 c) 10 d) 45 e) 79

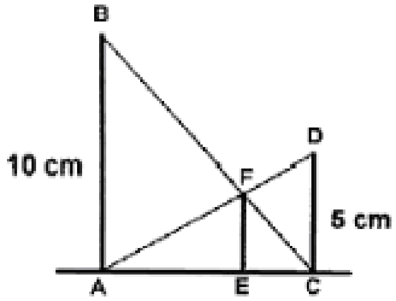
42) (UFRN) Uma escada de 13,0 m de comprimento encontra-se com a extremidade superior apoiada na parede vertical de um edifício e a parte inferior apoiada no piso horizontal desse mesmo edifício, a uma distância de 5,0m da parede.Se o topo da escada deslizar 1,0 m para baixo, o valor que mais se aproxima de quanto a parte inferior escorregará é:

a) 1 m b) 1,5 m c) 2 m d) 2,6 m

43) (UNESP) A distância entre dois lados paralelos de um hexágono regular é igual a $2\sqrt{3}$ cm. A medida do lado desse hexágono, em centímetros, é:

a) $\sqrt{3}$ b) 2 c) 2,5 d) 3 e) 4

44) (UFRGS) Na figura, AB, CD e EF são paralelos. AB e CD medem, respectivamente, 10 cm e 5 cm. O comprimento EF é:



a) $\frac{5}{3}$

b) 2

c) 3

d) $\frac{10}{3}$

e) 4

GABARITO

01	A	**02**	B	**03**	E	**04**	A	**05**	C
06	A	**07**	C	**08**	D	**09**	B	**10**	B
11	D	**12**	C	**13**	C	**14**	105	**15**	$\sqrt{7}$
16	$2\sqrt{21}$	**17**	1,25	**18**	A	**19**	C	**20**	D
21	B	**22**	A	**23**	B	**24**	B	**25**	D
26	E	**27**	A	**28**	E	**29**	B	**30**	E
31	D	**32**	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$			**33**	6	**34**	4
35	5	**36**	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	**37**	A	**38**	A	**39**	B
40	A	**41**	B	**42**	C	**43**	B	**44**	D