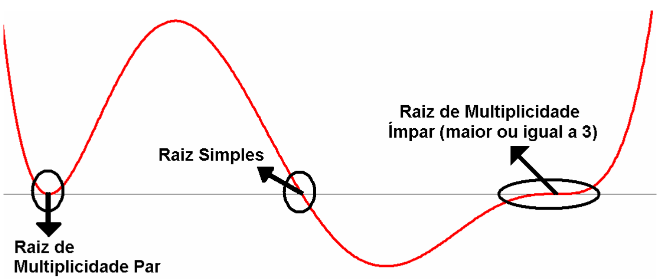
GRÁFICOS DE POLINÔMIOS

Para esboçarmos o gráfico de um polinômio, precisamos considerar três elementos: as raízes e suas multiplicidades, o termo independente do polinômio e o sinal do coeficiente líder.

Raízes

Encontrar as raízes é fundamental para esboçarmos o gráfico, e aprendemos a fazer isso resolvendo as equações polinomiais. Os mesmos métodos serão empregados aqui. A raiz de um polinômio indica o valor onde P(x) = 0. Graficamente**, é o valor de x onde o gráfico toca o eixo das abscissas**. Esse "toque" acontecerá de três modos, dependendo da multiplicidade da raiz:



Repare que quando a **multiplicidade da raiz é par o gráfico tangencia o eixo X**. De fato, seja $(x-r)^{PAR}$. Essa expressão é nula somente para x = r. Para qualquer outro valor de x ≠ r tem-se que $(x-r)^{PAR}$ é positivo. Ou seja, não existe valor de x tal que $(x-r)^{PAR}$ assuma um valor negativo.

Por outro lado, quando a **multiplicidade da raiz é ímpar o gráfico cruza o eixo X**, pois $(x-r)^{ÍMPAR}$ é positivo para $x > r$, zero para x = r e negativo para $x < r$. Ou seja, há troca de sinal, e o gráfico estará ora acima, ora abaixo do eixo X. Quanto maior for a potência ímpar, o gráfico se aproxima "mais lentamente" do eixo X; quando a potência for ímpar for igual a 1 (e a raiz for simples), o gráfico simplesmente cruza o eixo horizontal sem esboçar uma aproximação.

ATENÇÃO: As raízes complexas **nunca** aparecem no gráfico, pois o eixo cartesiano onde os gráficos são esboçados comporta somente números reais.

Termo Independente

Graficamente, **o termo independente é o <u>único</u> valor de y onde o gráfico corta o eixo das ordenadas**.

Se o polinômio não está na forma decomposta, o termo independente é facilmente localizado, pois é o único que não está associado à x.

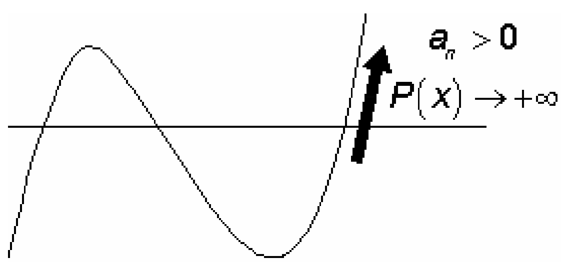
Se o polinômio está na forma decomposta, pode ser calculado por P(0).

Sinal do Coeficiente Líder

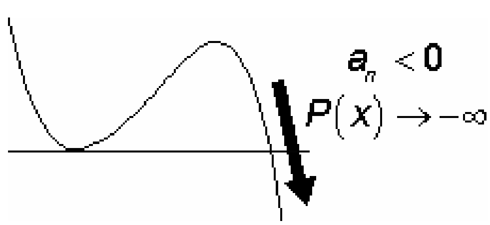
Os **únicos** pontos onde o gráfico de P(x) intercepta (cruzando ou não) o eixo X são as raízes desse polinômio. Assim, para valores de x *maiores que a maior raiz*, o gráfico de P(x) irá se manter sempre positivo ou sempre negativo. Assim, nos interessa descobrir o comportamento do gráfico quando os valores de x tendem ao infinito - ou seja, aumentam cada vez mais.

Esse comportamento é determinado pelo termo de maior grau de $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$. Se x é positivo, x^n também será. Assim, o sinal de $a_n x^n$ depende somente do sinal do coeficiente líder a_n:

Se $\boldsymbol{a_n > 0}$, $a_n x^n$ será positivo e **o gráfico de P(x) tenderá a infinito** quando x tender a infinito.



Se $\boldsymbol{a_n < 0}$, $a_n x^n$ será negativo e **o gráfico de P(x) tenderá a menos infinito** quando x tender a infinito.



EXERCÍCIOS DE AULA

01) Esboçar o gráfico de:

a) $P(x) = (x - 1).(x + 1).(x - 2)$

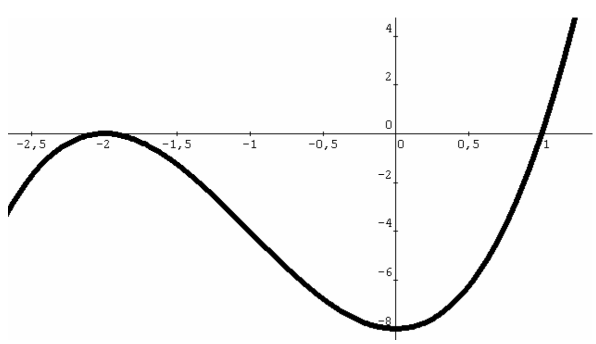
b) $P(x) = (1 - x)(x - 3)^2(x +1)^2$

02) Resolver as inequações abaixo:

a) $-2.x.(x + 3)^2.(x - 2)^3 \leq 0$

b) $2x^3 - 9x^2 + 13x - 6 > 0$

03) Qual o polinômio de 3º grau possui o gráfico abaixo?



EXERCÍCIOS

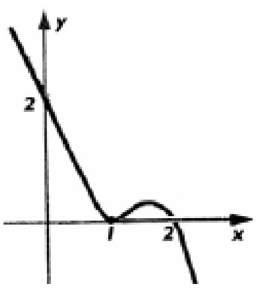
01) Esboçar o gráfico de:

a) $P(x) = (x + 1)^2(x - 3)(x - 1)^3$
b) $P(x) = x^2.(x + 1).(x - 3)^2$
c) $P(x) = -(x^2 + 1)(x + 1)$
d) $P(x) = (x + 1)^4(x - 1)^5(x + 2)^3$
e) $P(x) = -x.(x - 1)^2.(x - 3)^4$
f) $P(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x$
g) $P(x) = -x^5 - x^4 + x^3 + x^2$
h) $P(x) = -x^3 + 2x^2 + x - 2$

02) Com base nos polinômios e gráficos esboçados no exercício 01, resolver as inequações abaixo:

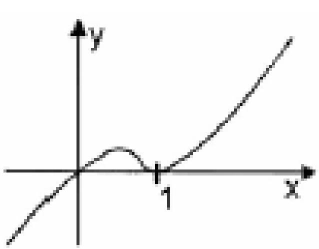
a) $P(x) \geq 0$ b) $P(x) \geq 0$ c) $P(x) > 0$ d) $P(x) > 0$
e) $P(x) \leq 0$ f) $P(x) \leq 0$ g) $P(x) < 0$ h) $P(x) < 0$

03) (UFRGS) A função polinomial que melhor se identifica com a figura é definida por:



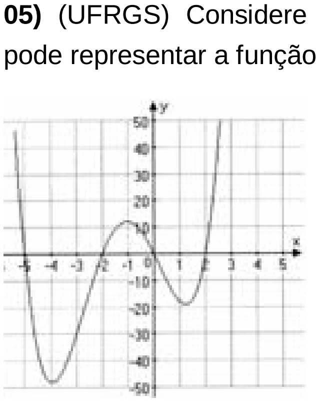
a) $p(x) = x^2 - 3x + 2$
b) $p(x) = -x^2 + 3x - 2$
c) $p(x) = 2.(x - 1).(x - 2)$
d) $p(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 2$
e) $p(x) = -x^3 + 4x^2 - 5x + 2$

04) (UFRGS) O conjunto $\{(x,y) \in \Re \times \Re / y = p(x)\}$ está representado pela curva da figura. A expressão que pode representar o polinômio p(x) é:



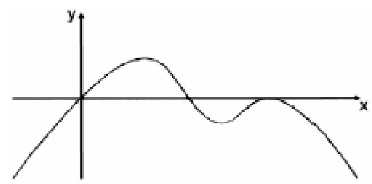
a) $x.(x - 1)^4$
b) $x.(x - 1)^3$
c) $x.(x - 1)$
d) $x^2.(x - 1)$
e) $x^3.(x - 1)$

05) (UFRGS) Considere o gráfico abaixo. Esse gráfico pode representar a função definida por:



a) $f(x) = x^3 + 5x^2 - 20x$
b) $f(x) = x^3 + 5x^2 - 4x - 20$
c) $f(x) = x^4 + 5x^3 - 20x - 4$
d) $f(x) = x^4 + 5x^3 - 4x - 20$
e) $f(x) = x^4 + 5x^3 - 4x^2 - 20x$

06) (UFRGS) O gráfico representa a função y = p(x).



Sabendo-se que p(x) é um polinômio com raízes reais, todas elas apresentadas no gráfico, assinale a alternativa **incorreta**.

a) O polinômio tem uma raiz múltipla
b) O polinômio tem 3 raízes distintas
c) O grau do polinômio é par
d) O termo independente do polinômio é zero
e) O número total de raízes do polinômio é 3

07) (UFRGS) Sobre o gráfico de $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$, podemos afirmar que:

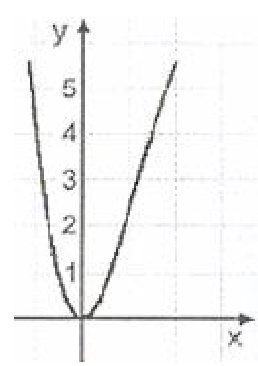
a) corta o eixo das abscissas somente em P
b) corta o eixo das abscissas em dois pontos
c) corta o eixo das abscissas em três pontos
d) não corta o eixo das abscissas
e) gráfico não corta o eixo das ordenadas

08) (UFRGS) Considere as afirmações sobre o polinômio $p(x) = (x + 1).(x - 1)^2.(x - 3)^3$. Quais estão corretas?

I - $p(x) \geq 0$ em $(-\infty, -1)$
II - $p(x) \geq 0$ em $(3, +\infty)$
III - p(x) troca de sinal em [-1, 3]

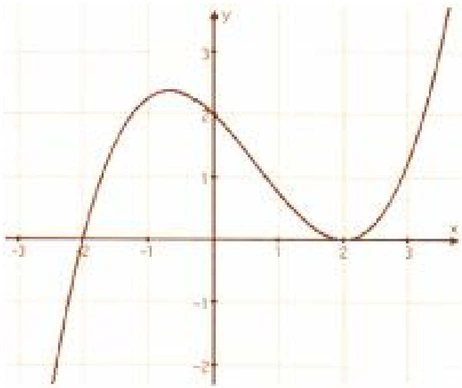
a) I b) **III** c) **I e II** d) **I e III** e) **I, II, III**

09) (UFRGS) O gráfico de uma função polinomial y = p(x) do terceiro grau com coeficientes reais está parcialmente representado na tela de um computador, como indica a figura abaixo. O número de soluções reais de p(x) = 2 é:



a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

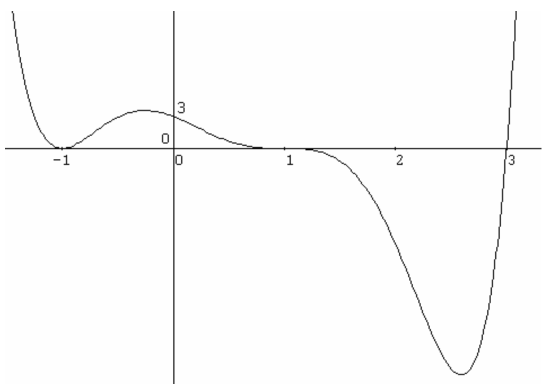
10) (UFRGS) Na figura abaixo está representado o gráfico de um polinômio de grau 3. A soma dos coeficientes desse polinômio é:



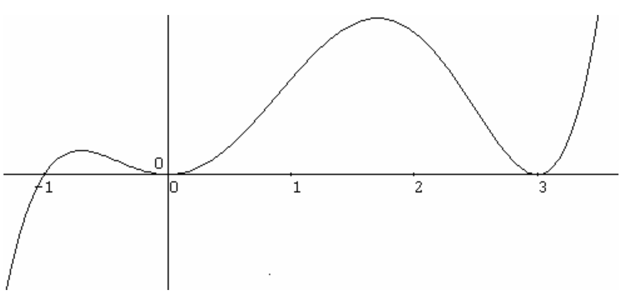
a) 0,5
b) 0,75
c) 1
d) 1,25
e) 1,5

GABARITO

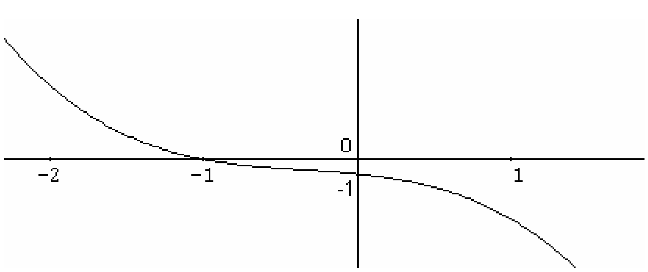
01a



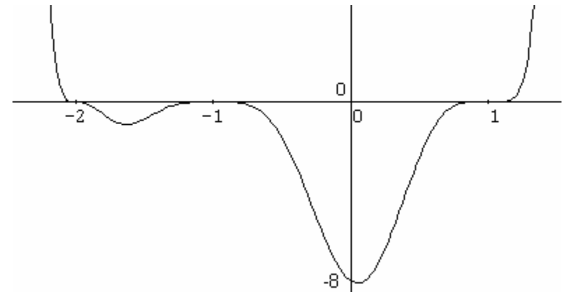
01b



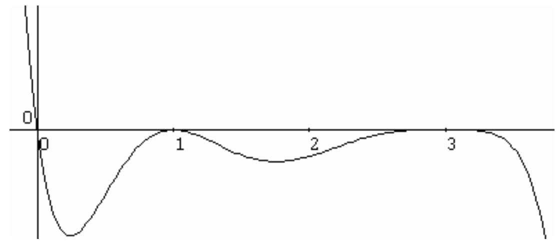
01c



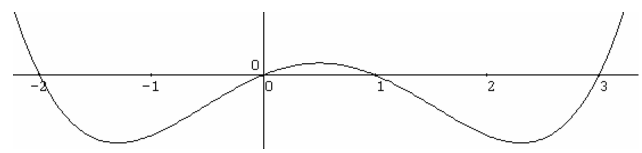
01d



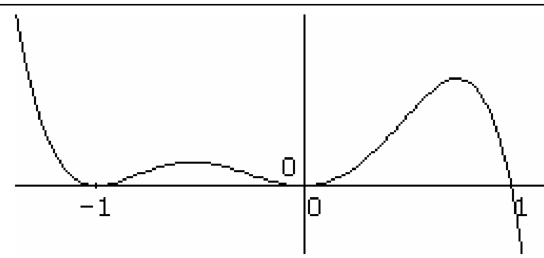
01e



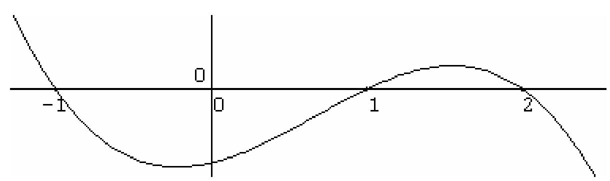
01f



01g



01h



02a	$x \leq 1$ ou $x \geq 3$	**02b**	$x \geq -1$
02c	$x < -1$	**02d**	$x < -2$ ou $x > 1$
02e	$x \geq 0$	**02f**	$-2 \leq x \leq 0$ ou $1 \leq x \leq 3$
02g	$x > 1$	**02h**	$-1 < x < 1$ ou $x > 2$

03	E	**04**	A	**05**	E	**06**	E
07	A	**08**	C	**09**	C	**10**	B