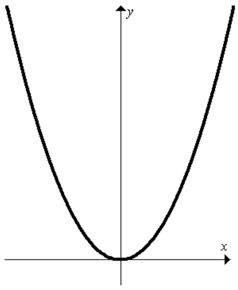
AULA 18 - GRÁFICOS

Esboçar, interpretar e transformar gráficos de funções são habilidades habitualmente exigidas em vestibulares. Especificamente no vestibular da UFRGS, uma parcela considerável de questões aborda tais conhecimentos. Aqui, iremos revisar conceitos já discutidos e abordar certas propriedades que são muito importantes para se obter um bom desempenho.

TRANSFORMAÇÕES

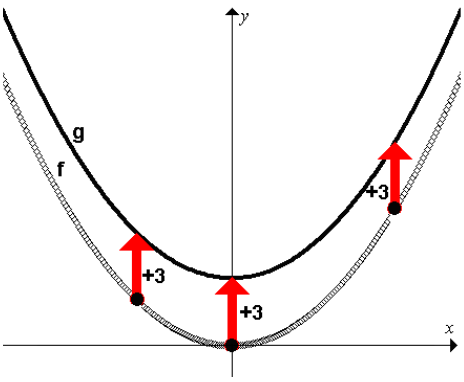
Deslocamento Vertical

O gráfico de certa função f(x) está representado abaixo. Não esqueça que *f(x)* é a notação utilizada para destacar que a variável y tem seu valor dependendo do valor de x. Assim, f(x) e y são equivalentes.



Queremos analisar o gráfico de outra função g(x) que se diferencia de f(x) pela soma ou subtração de um valor constante. Por exemplo, g(x) = f(x) + 3.

A equação g(x) = f(x) + 3 pode ser interpretada da seguinte maneira: para o *mesmo valor de x*, o valor de y da função g(x) supera o valor de y da função f(x) em três unidades. O efeito visual gerado corresponde a uma translação vertical no gráfico original.



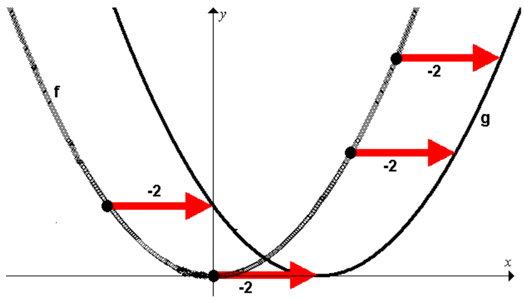
É possível generalizar: se $(x,\ y) \in f(x)$, e $g(x) = f(x) + a$, então (x; y + a) $\in$ g(x). Ou seja,

$$g(x) = f(x) + a \begin{cases} \text{a unidades para cima, se } a > 0 \\ \text{a unidades para baixo, se } a < 0 \end{cases}$$

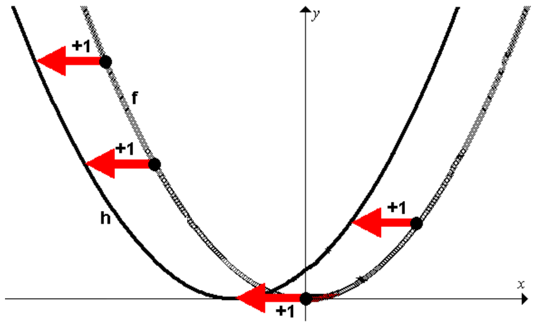
Deslocamento Horizontal

Voltemos à função f(x). No entanto, considere agora uma função g(x) que se diferencia de f(x) pela soma ou subtração de um valor constante na variável x. Por exemplo, $g(x) = f(x-2)$.

A equação $g(x) = f(x-2)$ equivale a dizer que ambas as funções apresentam o *mesmo valor de y* para diferentes valores de x. O fato de estar sendo *descontado 2* exige que seja *aumentado o valor de x* necessário para se obter determinado resultado. Como x aumenta no sentido do eixo horizontal, tal variação implica um **deslocamento horizontal de 2 unidades para direita** do gráfico de f(x).



No caso de um parâmetro positivo, o raciocínio é o mesmo e o efeito é contrário. Seja $h(x) = f(x+1)$. O fato de estar sendo *aumentado 1* exige que seja *reduzido o valor de x* necessário. Tal variação implica um **deslocamento horizontal de 1 unidade para esquerda** do gráfico de f(x).



É possível generalizar: se $(x,\ y) \in f(x)$, e $g(x) = f(x+a)$, então $(x+a,\ y) \in g(x)$. Assim,

$$g(x) = f(x+a)\ \begin{cases} a\ \textit{unidades}\ \textit{para}\ \textit{esquerda},\ \textit{se}\ a > 0 \\ a\ \textit{unidades}\ \textit{para}\ \textit{direita},\ \textit{se}\ a < 0 \end{cases}$$

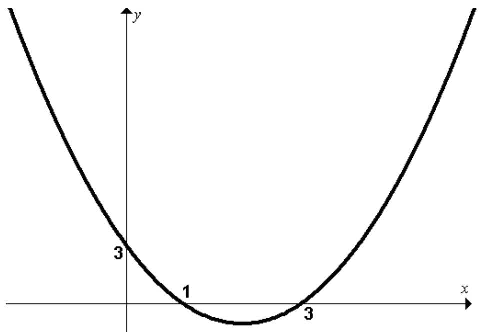
EXERCÍCIOS DE AULA

01) (UFRGS) Considere a equação *cos x = cos(x + π)*. Se $0 \le x \le 2\pi$ esta equação:

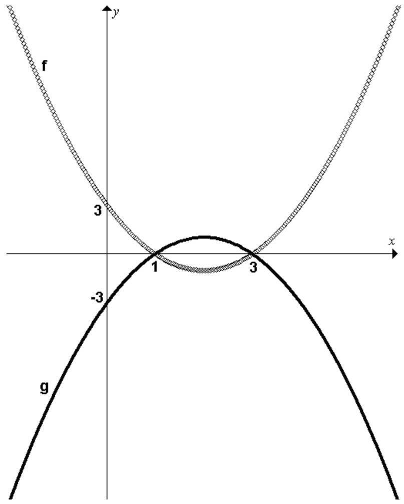
a) não tem solução
b) tem apenas uma solução
c) tem somente as soluções 0 e π
d) tem somente as soluções π/2 e 3π/2
e) tem infinitas soluções

Reflexão Vertical

Prosseguindo o estudo das principais transformações, o gráfico de certa função f(x) está esboçado abaixo.



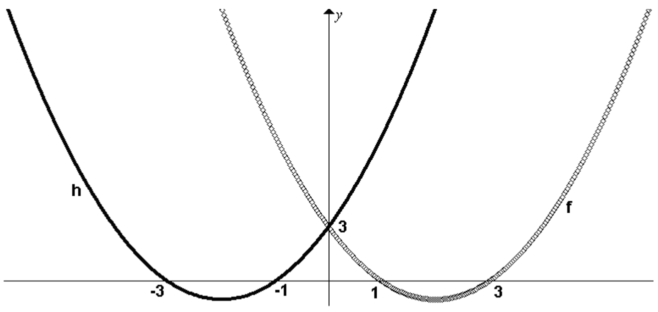
Seja g(x) tal que $g(x) = -f(x)$. Essa equação pode ser interpretada como as duas funções, *para os mesmos valores de x*, possuem valores de y com sinais opostos. As ordenadas que eram positivas passam a ser negativas, ocorrendo o inverso com as negativas. Tal variação implica uma **reflexão do gráfico de f(x) em torno do eixo x.**.



Generalizando: se $(x,\ y) \in f(x)$, e $g(x) = -f(x)$, então $(x,\ -y) \in g(x)$, e **os gráficos de f(x) e g(x) são simétricos em relação ao eixo x**.

Reflexão Horizontal

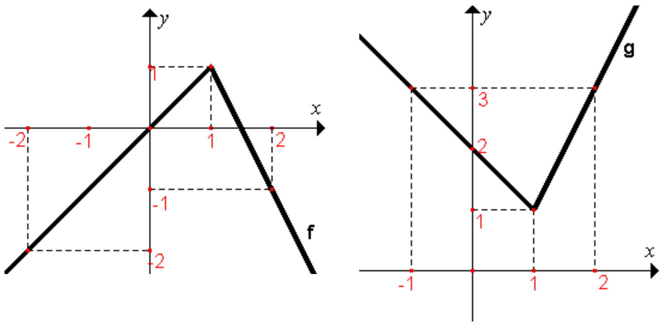
Por outro lado, seja h(x) tal que $h(x) = f(-x)$. Observe que agora as funções apresentam os *mesmos valores para y* para valores opostos de x. Ou seja, os pontos de f(x) têm as mesmas ordenadas que os pontos de h(x), porém com abscissas opostas. Tal variação implica uma **reflexão do gráfico de f(x) em torno do eixo y**.



Generalizando: se $(x,\ y) \in f(x)$, e $h(x) = f(-x)$, então $(-x,\ y) \in h(x)$, e **os gráficos de f(x) e g(x) são simétricos em relação ao eixo y**.

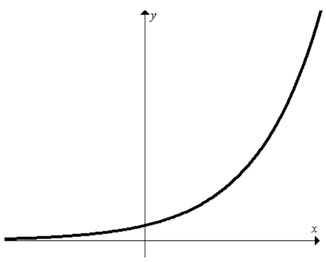
EXERCÍCIOS DE AULA

02) (UFRGS) Os gráficos abaixo representam as funções **f** e **g**. Pode-se afirmar que:



a) g(x) = f(x + 2)
b) g(x) = 2 - f(x)
c) g(x) = -2f(x)
d) g(x) = f(x - 2)
e) g(x) = f(2 - x)

03) Se o gráfico de f(x) está esboçado abaixo, esboce o gráfico de g(x) = -f(-x).



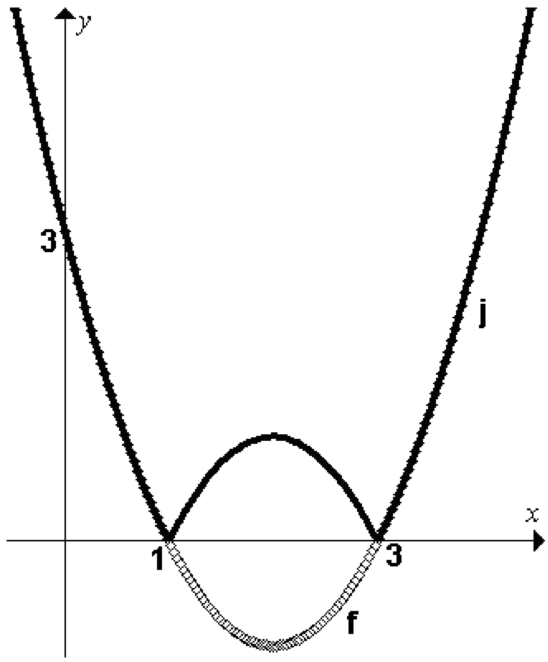
Módulo

Por fim, seja j(x) tal que $j(x)=|f(x)|$, onde f(x) possui o gráfico esboçado anteriormente. A definição de módulo diz que

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq 0 \\ -a, & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Repare que **-a**, no caso, não indica um número negativo, pois **a** já seria negativo. O sinal "**-**", aqui, indica somente uma troca de sinal.

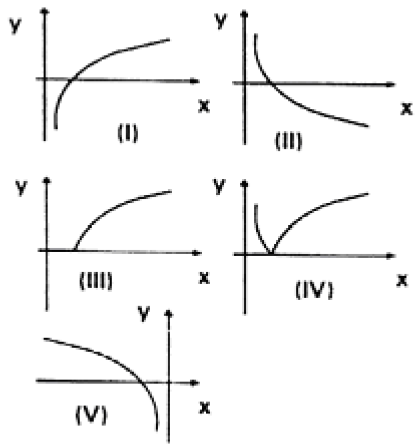
Com isso, os pontos com ordenada positiva conservam sua posição. Já os pontos com ordenada negativa sofrem uma reflexão em torno do eixo x. Tal variação, portanto, implica uma **reflexão da <u>parte negativa</u> do gráfico de f(x) em torno do eixo x**.



ATENÇÃO: é muito comum o módulo ser entendido de modo simplista, algo como "sempre positivo". Essa idéia funciona somente para problemas simples, do tipo |f(x)|. No entanto, quando o módulo é só uma parte da lei da função, é preciso uma análise mais cuidadosa, como será visto a seguir.

EXERCÍCIOS DE AULA

04) (UFRGS) Identifique os gráficos que correspondem a $y = \log x$ e $y = |\log x|$.



05) Esboce o gráfico de $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$.

06) Esboce o gráfico de $f(x) = 2 - |1 - x|$.

07) (FEI) Quantas raízes reais possui a equação $\log|x| = x^2 - x - 20$?

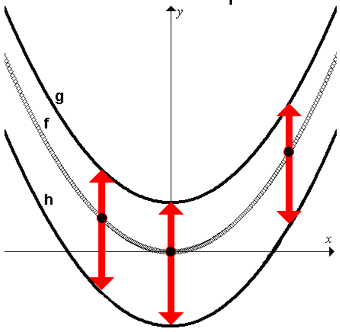
a) Nenhuma
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

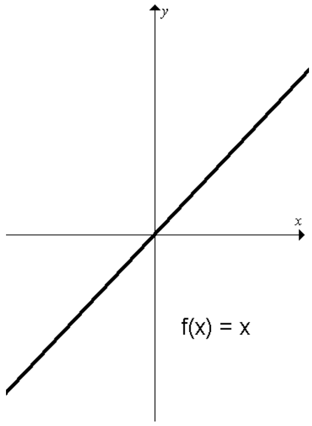
08) (PUCRJ) Assinale a afirmativa correta. A inequação **-|x| < x**:

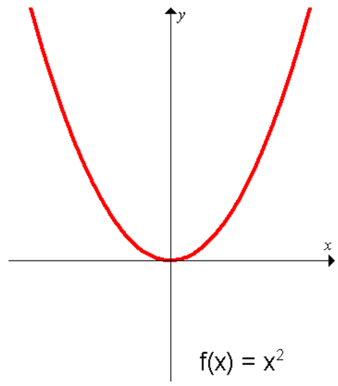
a) nunca é satisfeita
b) é satisfeita em x = 0
c) é satisfeita para x negativo
d) é satisfeita para x positivo
e) é sempre satisfeita

f(x) + k

K > 0: deslocamento para **cima**.
K < 0: deslocamento para **baixo**.

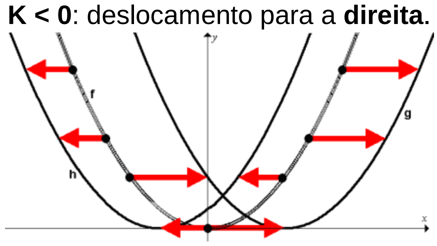


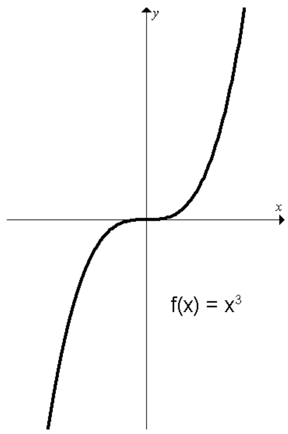


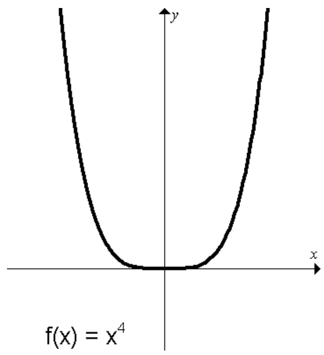


f(x + k)

K > 0: deslocamento para a **esquerda**.
K < 0: deslocamento para a **direita**.

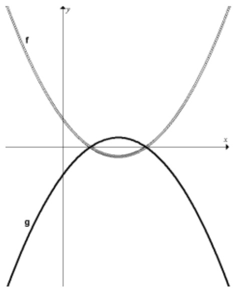


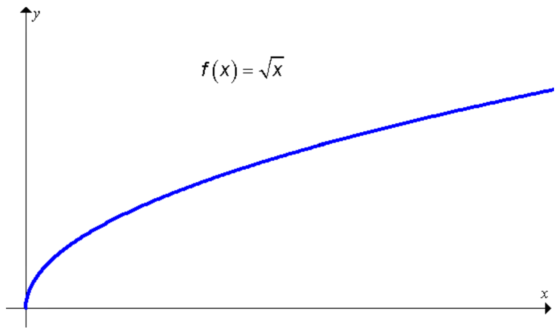




-f(x)

Reflexão em torno
do **eixo X**.

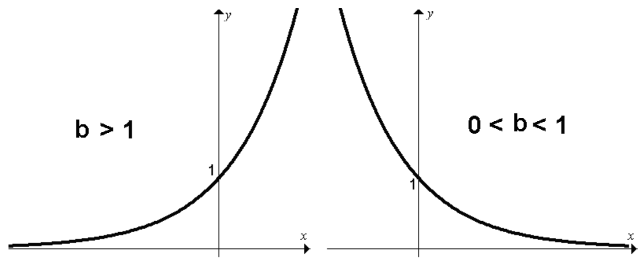




f(-x)

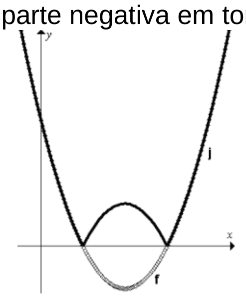
Reflexão em torno do **eixo Y**.

$$f(x) = b^x$$

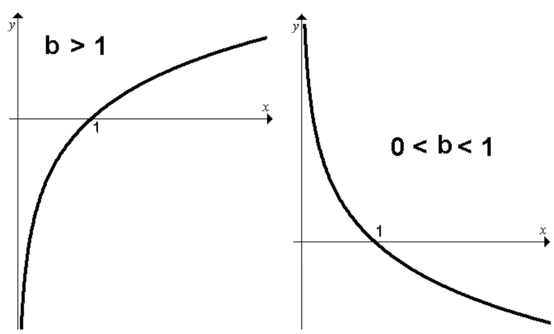


|f(x)|

Reflexão da parte negativa em torno do **eixo X**.

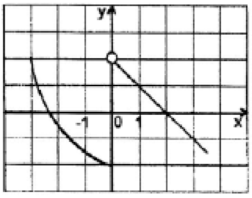


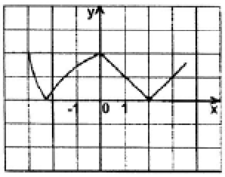
$$f(x) = \log_b x$$

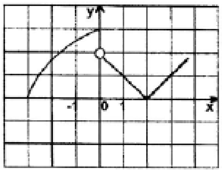


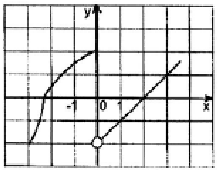
EXERCÍCIOS

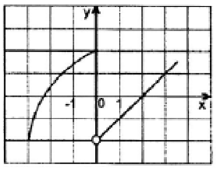
01) (UFRGS) Abaixo está representado o gráfico de y = f(x). O gráfico que representa a função y = |f(x)| é:

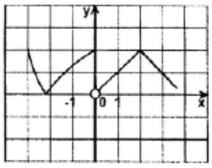


a) 

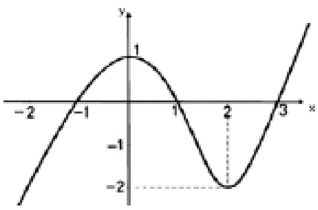
b) 

c) 

d) 

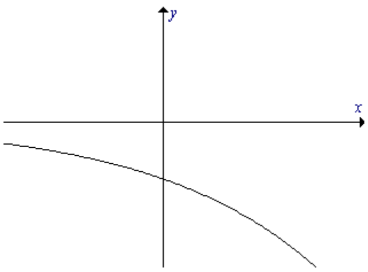
e) 

02) (UFRGS) O gráfico representa a função y = f(x). O conjunto $\{x \in \mathbb{R} / f(x) < 0\}$ é igual a



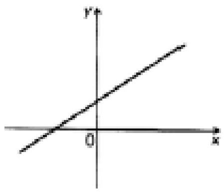
a)] 1, 3 [
b) $]-\infty, -1[\cup]1, 3[$
c) $]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$
d) $]-\infty, 0[$
e)] -2, 0 [

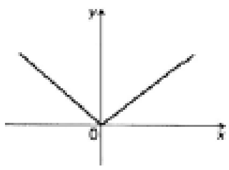
03) (UFRGS) A função representada no gráfico é definida por $f(x) = a \cdot b^x$. Então:

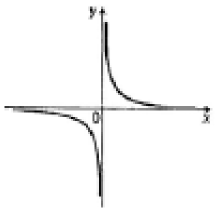


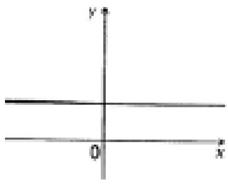
a) a < 0 e b > 1
b) a < 0 e 0 < b < 1
c) a < 0 e b = 1
d) a > 0 e b > 1
e) a > 0 e 0 < b < 1

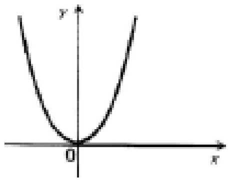
04) (UFRGS) O produto de duas variáveis reais, x e y, é uma constante. Portanto, dentre os gráficos abaixo, o único que pode representar essa relação é:

a) 

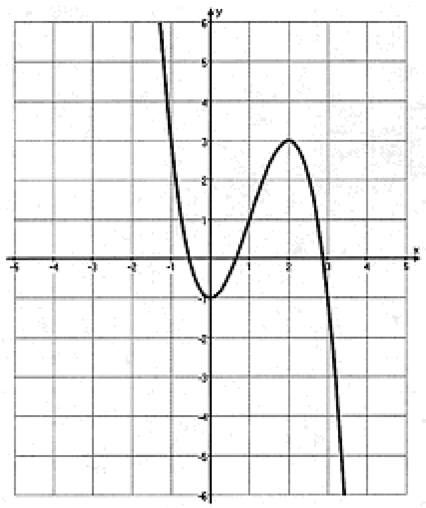
b) 

c) 

d) 

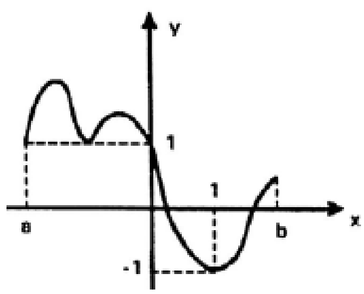
e) 

05) (UFRGS) O gráfico abaixo representa uma função polinomial f, de terceiro grau e domínio real. Se g(x) = f(x) - 5, o número de raízes de g(x) é:



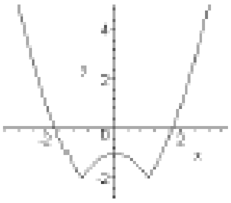
a) 0
b) 2
c) 1
d) 3
e) 4

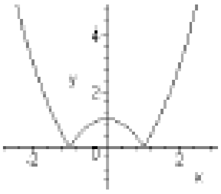
06) (UFRGS) O gráfico abaixo representa a função y = f(x). A solução da inequação $f(x) \geq 1$ é o conjunto dos valores de $x \in [a,\ b]$ tais que:

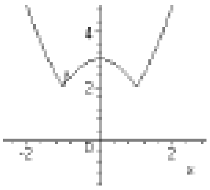


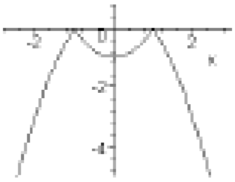
a) $x \leq 0$
b) $x \geq 0$
c) $x \leq 1$
d) $x \geq 1$
e) $x \in \mathbb{R}$

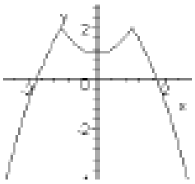
07) (PUCRS) Se **f(x) = x² - 1**, a representação gráfica da função g dada por **g(x) = |-f(x)| - 2** é:

a) 

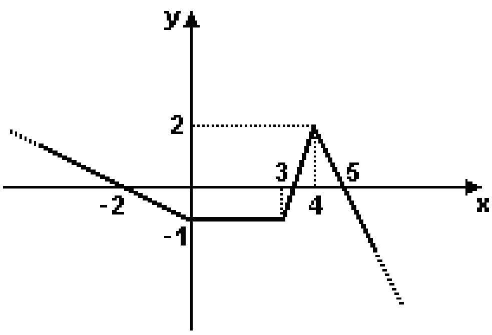
b) 

c) 

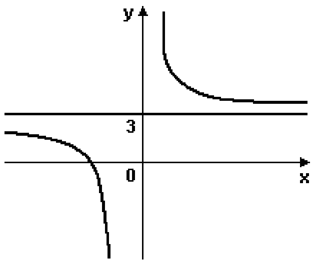
d) 

e) 

08) (UFU) A figura abaixo representa o gráfico de uma função real a valores reais, y = f(x). Sabendo-se que g(x) = f(x - 3), calcule **g(1) + g(4) + g(10)**.



09) (UNIRIO) Abaixo, o gráfico de f(x), sendo o eixo das ordenadas e a reta de equação y = 3, assíntotas da curva que representa f(x). Esboce o gráfico da função g(x) = f(x - 2) - 4.



10) (CESGRANRIO) O conjunto Imagem da função f(x) = |x² - 4x + 8| + 1 é o intervalo:

a) [5, + ∞ [b) [4, + ∞ [c) [3, + ∞ [
d) [1, + ∞ [e) [0, + ∞ [

11) (FEI) O conjunto imagem da função f:IR→IR, definida por f(x) = 1 - |x - 2| é:

a) $\{y \in \mathbb{R} / y \le 1\}$ b) $\{y \in \mathbb{R} / y \ge 1\}$ c) $\{y \in \mathbb{R} / y > 0\}$

d) $\{y \in \mathbb{R} / y \le 2\}$ e) $\{y \in \mathbb{R} / y \ge 2\}$

12) (PUCMG) O gráfico da função f(x) = |x| + 2 é constituído por:

a) duas semi-retas de mesma origem.
b) duas retas concorrentes.
c) duas retas paralelas.
d) uma única reta que passa pelo ponto (0, 2).

13) (UFC) Dadas as funções definidas por f(x) = |1 - x²| e g(x) = |x|, o número de pontos na interseção do gráfico de f com o gráfico de g é igual a:

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

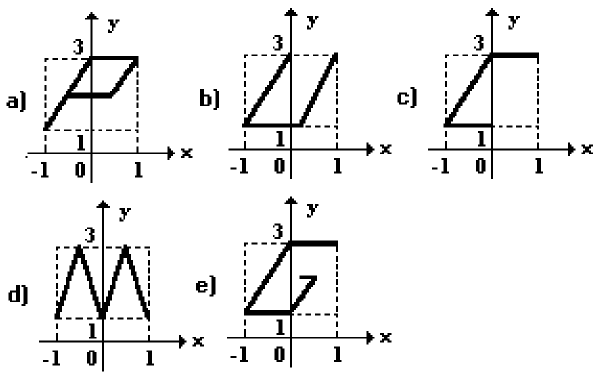
14) (UFG) Responda V ou F. Seja R o conjunto dos números reais. Considere a função f: IR → IR, definida por f(x) = |1 - |x||. Assim,

( ) f(-4) = 5.
( ) o valor mínimo de f é zero.
( ) f é crescente para x no intervalo [0,1].
( ) a equação f(x) = 1 possui três soluções reais distintas.

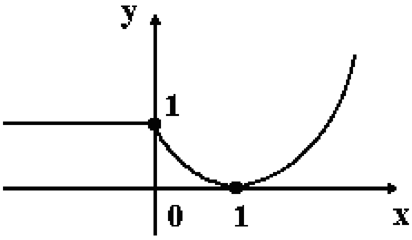
15) (UFT) Sejam f e g funções reais de uma variável real definidas por f(x) = |x - 1| e g(x) = 5. A área da região limitada pelos gráficos dessas funções é:

a) 10 unidades de área. c) 50 unidades de área.
b) 30 unidades de área. d) 25 unidades de área.

16) (PUCMG) Dos gráficos, o único que representa uma função de domínio $\{x \in \mathbb{R} / -1 \le x \le 1\}$ e imagem $\{y \in \mathbb{R} / 1 \le y \le 3\}$ é:



17) (UFMG) Na figura, está representado o gráfico de y = f(x). Sendo g(x) = 1 - f(x), a única alternativa FALSA sobre a função g é:

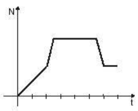


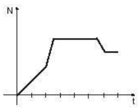
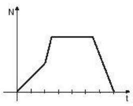
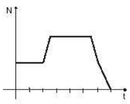
a) g(x) = 0 para todo $x \leq 0$ b) g(1) = 1

c) $g(x) \leq g(1)$ para todo x d) g(a) < g(b) se 1 < a < b

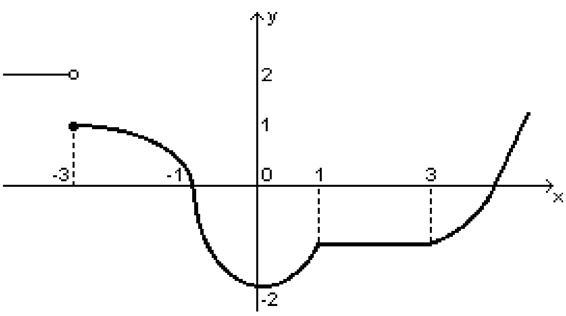
e) não existe $a \in$ IR tal que $g(x) \geq g(a)$ para todo x real

18) (UFRN) Na hora do banho, Mafalda abriu a torneira da banheira de sua casa e ficou observando o nível da água subir. Deixou-a encher parcialmente para não desperdiçar água. Fechou a torneira, entrou, lavou-se e saiu sem esvaziar a banheira. O gráfico que mais se aproxima da representação do nível (N) da água na banheira em função do tempo (t) é:

a) 

b)  c)  d) 

19) (UFV) Seja f a função real cujo gráfico se apresenta abaixo. É CORRETO afirmar que:



a) f(x) + 1 > 0, para todo $x \in$ IR.

b) f(x) - 1 < 0, para todo $x \in$ IR.

c) $f(0) \leq f(x)$, para todo $x \in$ IR.

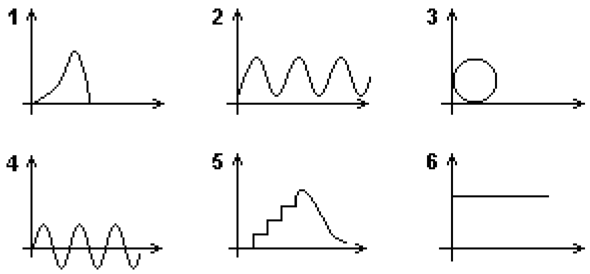
d) f(-3) = 2.

e) f(1,5) < f(2,5).

20) (UFRRJ) O matemático Mathias levou seu filho a um parque de diversões. Enquanto o menino se divertia nos brinquedos, Mathias passava o tempo fazendo tentativas de representar graficamente os movimentos de seu filho. Tentando representar, em função do tempo:

I. a altura de seu filho na roda gigante,
II. a velocidade de seu filho no escorrega,
III. a velocidade de seu filho na gangorra,
IV. a distância de seu filho até o centro do carrossel.

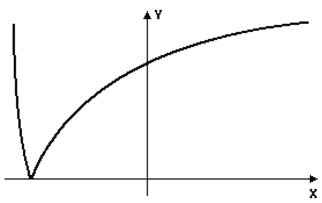
O matemático Mathias fez os seguintes gráficos:



O conjunto que melhor representa as relações entre movimentos e gráficos é:

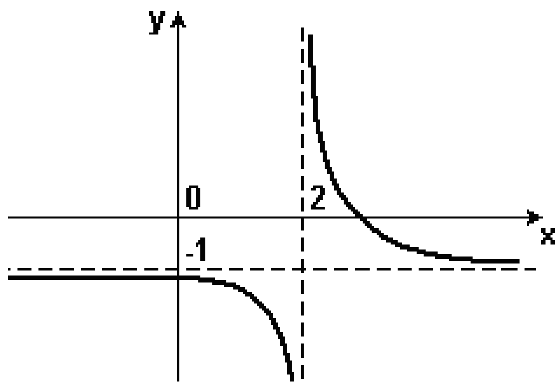
a) R = {(I, 2), (II, 1), (III, 4), (IV, 6)}.
b) R = {(I, 1), (II, 2), (III, 3), (IV, 4)}.
c) R = {(I, 3), (II, 5), (III, 2), (IV, 1)}.
d) R = {(I, 2), (II, 3), (III, 5), (IV, 6)}.
e) R = {(I, 3), (II, 4), (III, 5), (IV, 6)}.

21) (UFES) A figura abaixo representa melhor o gráfico da função:



a) $f_1(x) = |\log(x+1)|$
b) $f_2(x) = 1 + |\log(x+1)|$
c) $f_3(x) = |1 + \log(x+1)|$
d) $f_4(x) = \sqrt{x+0,9}$
e) $f_5(x) = 1 + \sqrt{x+0,9}$

GABARITO

01	A	**02**	B	**03**	A	**04**	C
05	C	**06**	A	**07**	A	**08**	-5
09							
10	A	**11**	A	**12**	A	**13**	B
14	FVFV	**15**	D	**16**	D	**17**	D
18	A	**19**	C	**20**	A	**21**	C